

DESSIN GEOMETRIQUE ET LAVIS

PAR MM. A. TRONQUOY ET J. PILLET

DESSIN GÉOMÉTRIQUE
THÉORIE DES OMBRES
ET DU LAVIS

LEÇONS PROFESSÉES A L'ÉCOLE TURGOT

PAR

J. PILLET

Ancien élève des écoles Polytechnique, des Ponts et Chaussées et des Beaux-Arts
chef de travaux graphiques à l'école des Ponts et Chaussées
professeur de dessin géométrique à l'école Turgot
professeur de stéréotomie à l'Association philotechnique

OUVRAGE

FAISANT SUITE AU COURS DE DESSIN GÉOMÉTRIQUE DE M. TRONQUOY

COURS DE 3^e ANNÉE. — 1^{re} PARTIE



PARIS

LIBRAIRIE CH. DELAGRAVE

58, RUE DES ÉCOLES, 58

Éléments de Géométrie descriptive (Enseignement spécial, 3^e année), par Eugène
professeur de Géométrie descriptive à l'école Polytechnique.

— Texte, 1 vol. in-12, cart.....
— Atlas de 28 planches. 1 vol. in-8 carré.....

DESSIN GEOMETRIQUE ET LAVIS

PAR MM. TRONQUOY ET J. PILLET.

DESSIN GÉOMÉTRIQUE

THÉORIE DES OMBRES

ET DU LAVIS

COURS DE 3^e ANNÉE. — 1^{re} PARTIE.

DESSIN DE MACHINES

L'album de la première partie du cours de 3^e année comprend 11 planches. — Savoir : 5 planches simples au trait et en noir, et 6 planches doubles, en chromolithographie à 12 et 15 teintes.

Chaque planche double se compose de deux feuilles séparées. La première feuille (LE TRAIT) donne *en noir* les contours et les lignes d'ombres et de construction, et *en rouge*, les lignes de séparation des teintes. — La seconde feuille (LE LAVIS) donne en chromolithographie le modèle complètement achevé et dégagé de toutes les lignes de construction.

L'album de la seconde partie, comprend 10 planches doubles, dont 10 feuilles au trait et 10 feuilles en chromolithographie à 15 et 18 teintes, figurant les principaux organes de machines.

On vend séparément, sur papier à lavis,

tirée en gris, imitant le trait de crayon, et prête à être lavée, chaque feuille *de trait* des planches doubles indiquées ci-dessus.

Le tirage de ces feuilles a été fait spécialement pour les personnes qui voudraient s'exercer au lavis sans avoir à exécuter le trait.

On trouve dans la collection de modèles

en relief de M. MURET, édité par la librairie Ch. Delagrave, tous les corps solides, cylindres, cônes, sphères, tores, étudiés dans cet ouvrage.

Le catalogue de ces reliefs est envoyé *franco* sur demande.

DESSIN GÉOMÉTRIQUE ET LAVIS

PAR MM. TRONQUOY ET J. PILLET.

DESSIN GÉOMÉTRIQUE
THÉORIE DES OMBRES
ET DU LAVIS

LEÇONS PROFESSÉES A L'ÉCOLE TURGOT

PAR

J. PILLET

ANCIEN ÉLÈVE DES ÉCOLES POLYTECHNIQUE,
DES PONTS ET CHAUSSÉES ET DES BEAUX ARTS
CHEF DE TRAVAUX GRAPHIQUES A L'ÉCOLE DES PONTS ET CHAUSSÉES
PROFESSEUR DE DESSIN GÉOMÉTRIQUE A L'ÉCOLE TURGOT
PROFESSEUR DE STÉRÉOTOMIE A L'ASSOCIATION PHILOTECHNIQUE

Ouvrage faisant suite au cours de dessin géométrique
de M. Tronquoy.

COURS DE 3^e ANNÉE. — 1^{re} PARTIE



PARIS

LIBRAIRIE CH. DELAGRAVE

15, RUE SOUFFLOT, 15

1882

*Tout exemplaire de cet ouvrage, non revêtu de notre griffe, sera
réputé contrefait.*

Ch. Delagrave



2211. — Abbeville. — Typ. et stér. Gustave Retaux.

PRÉFACE.

Le cours que nous publions est la suite de celui que feu M. Tronquoy avait commencé. Appelé à lui succéder à l'école Turgot, comme professeur de dessin géométrique, nous avons accepté la tâche difficile de continuer l'œuvre qu'il avait si bien mise en train. Les deux parties publiées par ses soins sont l'expression du cours de dessin géométrique fait à l'école Turgot, en préparatoire, première et seconde année. Celle que nous présentons aujourd'hui au public est la traduction du cours que nous professons en troisième année. C'est une théorie complète des ombres et du lavis, suivie d'applications au dessin de machines.

Afin de rendre ce livre plus facile à consulter pour le professeur aussi bien que pour l'élève, et afin de mieux initier le lecteur à la méthode d'enseignement suivie à l'école Turgot, nous avons adopté la division par leçons. Ces leçons sont au nombre de quarante-cinq. Chacune d'elles peut se faire dans l'espace d'une heure l'amphithéâtre.

Non-seulement, nous en donnons la substance au point de vue théorique, mais encore nous y joignons l'indication du travail graphique que les élèves doivent exécuter d'une leçon à l'autre.

Un lecteur attentif constatera de nombreuses répétitions ; s'il est professeur, nous croyons qu'il n'en sera pas étonné, car son expérience aura dû lui apprendre

qu'il faut souvent répéter les vérités les plus simples pour les graver dans l'intelligence des jeunes gens.

On sera peut-être étonné de voir que, dans cette troisième partie, nous supposons acquises des connaissances en géométrie descriptive, que la seconde partie du cours de M. Tronquoy ne semble pas avoir dû faire acquérir aux élèves.

En réalité, dans le cours de seconde année que nous professons à l'école Turgot, nous avons peu à peu été amené à développer considérablement ces connaissances, sans jamais cesser cependant d'être suivi par nos élèves. C'est pourquoi, nous engageons les professeurs à faire comme nous et à ne pas craindre, en seconde année, d'employer pour justifier le tracé des épures qui font l'objet du cours, les véritables méthodes de géométrie descriptive, sans chercher à les déguiser.

D'ailleurs, dans une prochaine édition du cours de seconde année, nous refondrons complètement le texte de l'ouvrage, sans rien changer aux planches, et nous le mettrons à la hauteur à laquelle il doit être, sans cesser pourtant d'être très-élémentaire.

Dans des écoles aussi fournies d'élèves que celles de la ville de Paris, le problème le plus difficile à résoudre consistait à faire marcher à peu près de front les cent ou cent trente jeunes gens qui composent une classe.

En dessin géométrique, s'il avait fallu se contenter des avis individuels donnés à la salle de dessin, on conçoit qu'un élève ne recevant ces conseils qu'une fois par mois environ, ne pourrait faire que des progrès insensibles. Il fallait donc trouver le moyen de donner des conseils collectifs à un auditoire aussi nombreux et de s'assurer qu'ils étaient reçus.

A cet effet, chaque semaine, les élèves d'une même classe sont réunis pendant une heure à l'amphithéâtre ; le pro-

fesseur y expose sa leçon comme il le ferait pour de l'histoire ou des mathématiques.

Comme le but final est l'exécution d'un dessin, le professeur en fait un croquis très-soigné au tableau, point par point, ligne par ligne, en justifiant et expliquant tous ses tracés.

Les élèves sont arrivés à l'amphithéâtre munis d'une copie blanche, ou mieux encore d'un album de croquis, d'un crayon, d'un canif et d'une gomme à effacer, et ils font le dessin, à main-levée, en même temps que le professeur exécute le sien au tableau.

Les explications verbales ne peuvent être prises par les élèves, ils n'en auraient pas le temps. Lorsqu'elles sont très-importantes, ou lorsqu'elles constituent des définitions, dans ce cas, le professeur les dicte.

A la fin de la leçon, à l'amphithéâtre, les croquis sont relevés et cotés immédiatement par le professeur, ce qui est l'affaire de vingt minutes environ pour cent vingt élèves. Des récompenses ou des punitions sont la conséquence de ce jugement rapide.

Les élèves vont ensuite à la salle de dessin, leurs croquis leur sont rendus et c'est en s'en aidant qu'ils commencent la mise au net.

On trouvera dans le texte tous les croquis que nous faisons à nos leçons, ainsi que les explications dont nous les accompagnons, et dans la rédaction desquelles nous avons conservé, autant que possible, la forme familière qu'il convient de leur donner pour ne pas fatiguer l'attention de jeunes élèves. Dans la partie du cours consacrée au dessin de machines, on rencontrera des croquis compliqués, qu'il serait véritablement impossible d'exécuter devant les élèves, dans l'espace d'une heure, surtout, si l'on voulait y placer les cotes qui donnent les dimensions. Aussi, le professeur ne les fera-t-il pas en

entier, et se contentera-t-il d'indiquer le tracé des grandes lignes et des axes, ainsi que les pièces nécessaires pour faire comprendre la physionomie, le rôle et la construction de l'organe de machine qu'il étudiera.

Les figures du texte sont entièrement conformes, comme proportions et comme lettres, aux planches qui servent de modèles.

Pour rendre nos leçons écrites pour ainsi dire plus vivantes et plus conformes aux leçons orales, les figures du texte ne sont le plus souvent que de vrais croquis reproduits d'ailleurs par la photographie, d'après des croquis faits à la main et à plus grande échelle.

De même que les deux premières parties du cours publiées par M. Tronquoy, celle-ci a été faite sous les auspices, et pour ainsi dire sous les yeux de M. Marguerin, auquel les écoles de la ville de Paris doivent tant ; son expérience profonde nous a bien souvent montré la voie dans laquelle il fallait nous maintenir.

Qu'il nous soit permis, en terminant, de remercier l'éditeur, M. Delagrave, des sacrifices qu'il a bien voulu faire pour cet ouvrage. Les planches de chromo-lithographie qui l'accompagnent, ont été tirées avec un luxe de couleurs auquel on n'avait jamais osé atteindre pour aucun ouvrage de ce genre. Il ne fallait rien moins que le zèle ardent et éclairé qu'il met à la publication des ouvrages classiques pour l'engager à entreprendre de telles planches.

DESSIN GÉOMÉTRIQUE

3^e ANNÉE

PREMIÈRE PARTIE

THÉORIE DES OMBRES ET DU LAVIS.

1^{re} LEÇON.

OMBRES. — GÉNÉRALITÉS.

1. OBJET DU COURS DE 3^e ANNÉE.

Dans le cours de 2^e année, nous avons étudié les projections, les éléments du lavis et les principes élémentaires du dessin d'architecture. Dans celui de 3^e année, nous nous occuperons, dans une première partie du cours, du tracé des ombres, et de la théorie raisonnée du lavis ; puis, nous terminerons, dans une seconde partie, par l'application de tout ce qui aura été vu jusqu'alors, au dessin et au lavis de machines.

2. ORDRE DES LEÇONS. — CROQUIS. — MISES AU NET.

De même qu'en seconde année, chaque semaine, les élèves auront à faire un croquis au crayon, à l'amphithéâtre, en copiant celui que le professeur exécutera au tableau.

Ce croquis fait à main levée, mais en se servant cependant du compas, sera corrigé chaque fois et aussitôt après la sortie de l'amphithéâtre.

Les élèves s'en serviront pour les dessins de mise au net. Dans les classements trimestriels, les notes de croquis compteront pour moitié de celles des autres dessins.

Les mises au net, suivant leur importance, seront exécutées par les élèves en une, deux ou trois semaines. Chaque semaine, le professeur indiquera le degré d'avancement que devra, la semaine suivante, avoir atteint le dessin.

Les feuilles de papier seront toujours tendues sur les planches, et non fixées aux coins seulement. L'opération du collage du papier sera faite par les élèves, chez eux et non à l'école. Enfin, les élèves devront posséder une boîte de compas en bon état, un T, deux équerres dont une à 45°, deux godets au moins, dont un grand, deux pinceaux, un bâton d'encre de Chine et des couleurs à l'eau, qui seront désignées plus tard.

Tous les mois, il sera fait une inspection des objets indiqués ci-dessus.

3. LA LUMIÈRE.

La lumière est l'agent physique à l'aide duquel l'existence des objets est révélée à nos yeux.

4. CORPS LUMINEUX PAR EUX-MÊMES.

Certains corps sont des sources de lumière. Tel sont le soleil, la flamme d'une bougie, un boulet rouge. On dit que ces corps sont lumineux par eux-mêmes.

5. CORPS ÉCLAIRÉS.

D'autres ne sont lumineux qu'après avoir reçu de la lumière. S'ils ne l'absorbent pas tout entière, ils en renvoient une partie et deviennent à leur tour, sources de lumière. Nous étudierons plus tard les conditions dans lesquelles se font cette absorption et ce renvoi.

6. CORPS DANS L'OMBRE.

Les corps qui ne reçoivent pas de lumière sont dits dans *l'ombre*.

L'ombre peut être due, soit à l'absence de lumière, soit à la présence d'objets qui viennent masquer la lumière existante.

7. CORPS OPAQUES ET TRANSPARENTS.

Les corps opaques sont ceux qui arrêtent la lumière et qui, par conséquent, donnent lieu à de l'ombre.

Les corps transparents sont ceux qui la laissent passer, en partie du moins. Aucun corps n'est ni absolument transparent, ni absolument opaque. Une feuille d'or très-mince est transparente, et paraît verte.

Les corps transparents donnent donc lieu à une diminution de lumière, mais ne produisent pas une ombre absolue.

8. LUMIÈRE DIRECTE. — REFLETS ET LUMIÈRE INDIRECTE.

Lorsqu'une source de lumière éclaire une série d'objets, on appelle *lumière directe* celle qui en émane; mais les objets qu'elle éclaire deviennent à leur tour source de lumière plus ou moins forte, dirigée dans tel ou tel sens. Cette lumière ou plutôt ces lumières secondaires se nomment *reflets* ou *lumières indirectes*.

9. BUT DE LA THÉORIE DES OMBRES ET DE LA THÉORIE DU LAVIS.

La théorie des ombres a pour but, connaissant la position d'une ou de plusieurs sources de lumières directes, de déterminer sur les objets qui sont en présence, les portions de ces objets qui sont éclairées et celles qui sont dans l'ombre.

Cette théorie est toute géométrique et se fait à l'aide des méthodes de la géométrie descriptive.

La théorie du lavis a pour objet : d'étudier les différences d'éclat ou de couleur que présentent les objets : 1^o suivant la manière dont ils reçoivent la lumière directe ou les reflets ; 2^o suivant la position qu'ils occupent par rapport au spectateur. Elle donne le moyen de rendre ces différences sur les dessins, à l'aide des couleurs ; couleurs parmi lesquelles nous rangerons l'encre de Chine, ou tout autre ton servant à produire les effets de l'ombre.

Cette théorie est empirique, c'est-à-dire, qu'elle est basée sur l'observation. Elle est plutôt du domaine de la physique que de celui de la géométrie.

10. PROPAGATION DE LA LUMIÈRE.

Nous ne nous occuperons pas ici du véritable sens dans

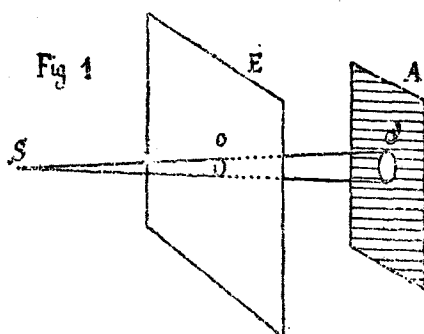
lequel il faut comprendre la loi de propagation de la lumière. Nous expliquerons seulement ce que l'on doit entendre par cette phrase :

La lumière se propage en ligne droite.

Soit S (fig. 1) un point lumineux, E un corps opaque ou écran, et O un très-petit trou pratiqué dans cet écran. Par le trou O passera de la lumière.

Si on place en A un second écran, il sera dans l'ombre sauf un petit espace O' qui sera en ligne droite avec l'ouverture O, et le point lumineux S.

Voilà ce que constate l'expérience. La lumière qui a passé par le trou O, a continué son chemin jusqu'en O' et en ligne droite.



Les choses se passent donc, comme si le point S envoyait, dans toutes les directions et en ligne droite, ce que nous nommerons des *rayons lumineux*.

Tout point qui recevra l'un de ces rayons sera éclairé, tout point qui n'en recevra pas sera dans l'ombre.

11. LUMIÈRE AU FLAMBEAU OU A RAYONS DIVERGENTS

Nous supposerons le plus souvent que la lumière émane d'un point et non d'un corps ayant des dimensions appréciables. (Dans ce dernier cas, l'ombre se complique de la pénombre.)

Ce point lumineux peut être situé à distance finie. Tel est, par exemple, un flambeau.

La lumière qui en émane est dite lumière *au flambeau* ou à rayons divergents, car les rayons venant tous d'un point qui n'est pas à l'infini ne sont pas parallèles.

12. LUMIÈRE AU SOLEIL OU A RAYONS PARALLÈLES.

Le point lumineux peut être tellement loin, qu'on puisse le considérer comme à l'infini. Tel est le soleil, ou une étoile. La lumière qui en émane est dite alors *lumière au soleil*, ou à rayons parallèles.

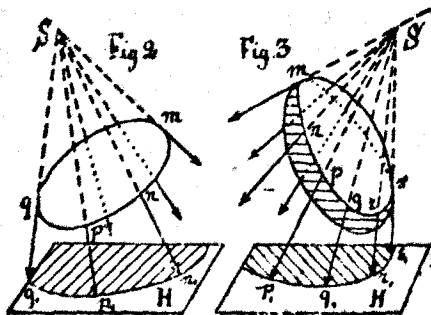
Dans les tableaux pittoresques, on se sert indifféremment de la lumière au flambeau ou au soleil. Dans tel tableau de Rembrandt, l'éclairage est produit souvent par une lampe apparente dans le tableau.

Dans le dessin géométrique, on suppose toujours les rayons parallèles et dans les épreuves, on a soin d'indiquer par deux projections, un seul de ces rayons, tous les autres lui seront parallèles sur les deux projections.

On se sert toujours du rayon dit à 45° , dont nous avons déjà parlé en seconde année, mais que nous étudierons plus en détail dans une des leçons suivantes.

13. CONE D'OMBRE D'UNE PORTION DE SURFACE OU D'UN CORPS SOLIDE, DANS LE CAS DE LA LUMIÈRE AU FLAMBEAU.

Soit (pl. 1, fig. 2) une portion de surface (une portion de plan, par exemple), limitée par une courbe m, n, p, q et soit S un flambeau.



Si nous menons tous les rayons lumineux Sm, Sn, Sp, Sq qui viendront raser le bord de la surface, ces rayons formeront un cône qui se nomme le *cône d'ombre* de la surface.

Il est évident que tout point, situé dans l'intérieur de ce cône, et du côté opposé au flambeau, sera dans l'ombre, et que tout point, situé en dehors, sera dans la lumière.

Si nous imaginons une autre surface, un plan H , par exemple, les rayons limites $Sm, Sn, Sp, \dots$ prolongés en n_1, p_1, q_1 jusqu'au plan, viendront former en m_1, n_1, p_1, q_1 une courbe qui limitera l'*ombre portée* par la première surface sur la seconde.

Au lieu d'une portion limitée de surface, prenons (pl. 1, fig. 3) un corps arrondi.

Menons les rayons Sm , Sn , Sp , Sq , qui viennent raser sa surface, autrement dit, qui lui sont *tangents*. Ils formeront un cône tangent ou mieux *circonscrit* à la surface et qui sera son *cône d'ombre*.

La ligne m , n , p , q , suivant laquelle le cône d'ombre touche la surface, est la courbe de contact de ce cône circonscrit, et prend le nom de *courbe d'ombre propre* du corps, parce qu'elle forme la séparation de la portion du corps qui est dans l'ombre et de celle qui est dans la lumière.

Si nous prenons une deuxième surface H et si nous prolongeons le cône d'ombre, c'est-à-dire les rayons limites jusqu'aux points p_1 q_1 r_1 s_1 où ils coupent cette surface. Nous aurons en p_1 q_1 r_1 s_1 la ligne *d'ombre portée* par la première surface sur la seconde.

14. REMARQUE ÉVIDENTE.

La ligne p_1 q_1 r_1 s_1 d'ombre portée par la première surface sur la seconde est la même que celle que porterait sa ligne d'ombre propre p , q , r , s , en supposant qu'elle existât seule.

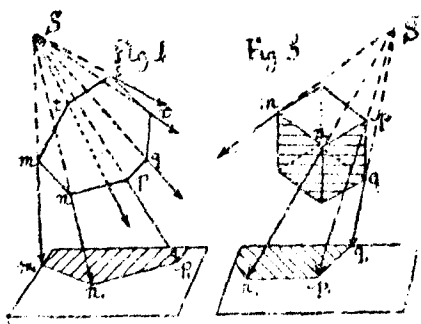
Conséquences :

1° Quand on connaît la courbe d'ombre propre d'un corps, on connaît aussi son cône d'ombre et on peut en déduire son ombre portée sur tout autre corps ;

2° Inversement. Si on connaît la courbe d'ombre portée par un corps sur un autre, on peut en déduire le cône d'ombre du premier corps ; puis, comme nous le verrons plus tard, la ligne d'ombre propre et son ombre portée sur tout autre corps.

15. PYRAMIDE D'OMBRE.

Si la portion de surface, au lieu d'être limitée par une courbe, l'est par un polygone (fig. 4) m , n , p , q ,... le cône d'ombre devient dans ce cas une pyramide d'ombre.



Si le corps, au lieu d'être arrondi, est à facettes planes, il en sera de même.

La ligne d'ombre propre, au lieu d'être courbe, est une ligne polygonale, (ordinairement gauche, c'est-à-dire non située dans un plan), m , n , p , q .

Elle est déterminée par les rayons qui viennent raser la

surface, et qui dans leur mouvement glisseront successivement sur différentes arêtes du corps solide.

La pyramide d'ombre, prolongée jusqu'aux objets qu'elle pourra rencontrer, donnera, par son intersection avec la surface de ces objets, la ligne d'ombre portée par le premier corps sur le second.

Enfin, la remarque (n° 14) s'applique encore à ce cas.

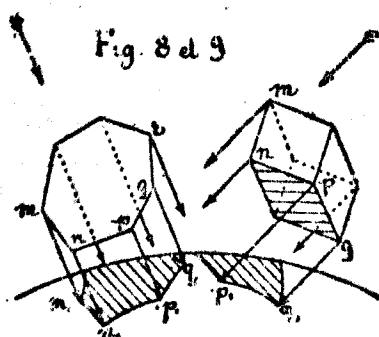
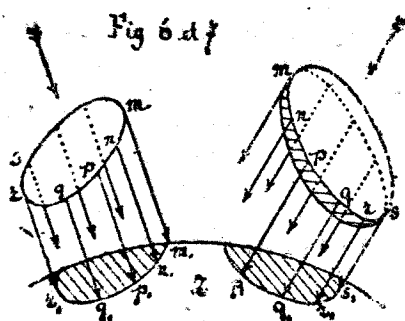
16. LUMIÈRE AU SOLEIL, CYLINDRE D'OMBRE.

Si les rayons sont parallèles, et si l'on prend une portion de surface limitée par une courbe ou un corps arrondi, les rayons limites formeront un *cylindre d'ombre* et non plus un cône.

Dans le second cas (celui du corps rond), (fig. 7), la ligne de contact m, n, p, q, r, s du cylindre d'ombre, sera la *ligne d'ombre propre* du corps.

Si nous prolongeons les cylindres d'ombre jusqu'à leur rencontre avec une autre surface z (plane ou courbe), nous aurons en $m_1 n_1 p_1 q_1 \dots$ les *lignes d'ombre portées* sur cette surface.

La remarque n° 14 nous fera voir encore : 1°, que la ligne d'ombre portée est précisément l'ombre que porterait, si elle existait toute seule, la ligne d'ombre propre ;



2° Que la connaissance de la ligne d'ombre propre entraîne celle du cylindre d'ombre et celle des lignes d'ombres portées ;

3° Que, réciproquement, la connaissance d'une ligne d'ombre portée entraîne aussi celle du cylindre d'ombre, et par suite celle de la ligne d'ombre propre.

17. PRISME D'OMBRE.

Si la portion de surface est limitée par un polygone, ou si le corps est polyédrique, le cylindre d'ombre devient un prisme, mais les conséquences sont les mêmes. Les élèves les déduiront eux-mêmes sans difficulté.

Méthodes générales pour la recherche des ombres.

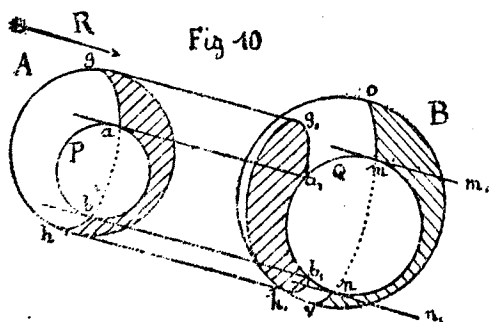
18. Nous aurons recours, pour la recherche des ombres propres et portées, à 3 méthodes générales, que nous appliquerons suivant les cas, soit l'une d'elles toute seule, soit deux, soit toutes ensemble.

Ces méthodes sont :

- 1° La méthode des plans sécants ;
- 2° La méthode des surfaces circonscrites ;
- 3° La méthode des ombres portées et des enveloppes.

19. MÉTHODE DES PLANS SÉCANTS.

Soit A et B (fig. 10, pl. 1), deux surfaces. On veut trouver leurs lignes d'ombre propre, et s'il y a lieu, l'ombre portée par la première sur la seconde.



Soit R la direction des rayons lumineux.

On coupera les deux surfaces par un plan qui n'est pas figuré ici, mais qui sera parallèle au rayon lumineux.

Soient P et Q les courbes de section qu'il détermine dans chacune d'elles. (Pour simplifier le dessin, nous avons supposé ici que les corps étaient des sphères et que les sections P et Q étaient, par conséquent, des cercles).

Menons à la première section P deux tangentes parallèles au

rayon lumineux : soient aa_1 , bb_1 , ces tangentes. (On voit immédiatement l'utilité d'avoir pris le plan de coupe, parallèle au rayon lumineux, autrement, une tangente parallèle au rayon de lumière eût été impossible à mener à la courbe de section).

Aux points a et b , les rayons lumineux, étant tangents à la courbe P sont aussi tangents à la surface du corps. Ce sont des rayons rasants, par conséquent, les points a et b sont deux points de la courbe d'ombre propre de la première surface.

Si nous menons les deux tangentes m_1 , n_1 à la section Q dans la deuxième surface, les points de tangence m et n seront des points de la ligne d'ombre propre de la deuxième surface.

Enfin, si nous prenons les points a_1 et b_1 où les rayons limites de la première courbe P , coupent la seconde courbe Q , nous aurons des points de la ligne d'ombre portée par la première surface sur la seconde.

D'autres plans sécants donneront naissance à d'autres points des lignes que nous cherchons. Quand nous les aurons trouvés en assez grand nombre, nous les joindrons séparément par un trait continu et nous aurons les deux lignes d'ombre propre $g. a. b. h.$, $o. m. n. p.$ et la ligne d'ombre portée, $g_1 a_1 b_1 h_1$.

20. APPLICATION A L'OMBRE D'UN TORE.

Supposons que l'on veuille trouver :

- 1° L'ombre propre d'un tore ;
- 2° L'ombre qu'il porte sur lui-même et que nous appellerons son ombre *autoportée*.

Un premier plan (fig. 11), coupant près de son contour extérieur, donnera comme section une courbe affectant un peu la forme d'une ellipse, mais n'en étant pas une. A cette courbe nous mènerons deux tangentes a et b parallèles au rayon lumineux, et nous aurons en a et b deux points de la courbe d'ombre propre.

Fig. 11.

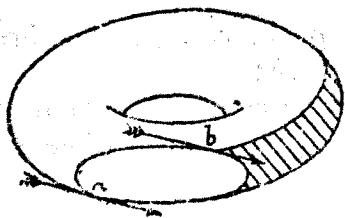
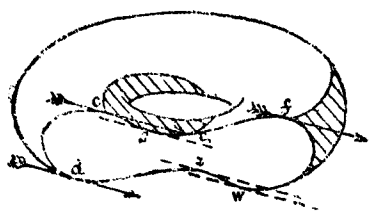


Fig. 12. Un second plan, pris plus près du centre, donnera comme coupe une courbe à inflexion, ayant une forme bouclée ; on pourra lui mener six tangentes parallèles au rayon lumineux ; il semblerait donc que l'on pût en conclure l'existence de six points de l'ombre propre. Mais on remarquera, que parmi ces six tangentes, les

Fig. 12



trois tangentes s , z et w , n'arriveraient à leur point de contact qu'après avoir traversé la masse du tore, les rayons qu'elles représentent seront donc arrêtés avant d'y atteindre, et ces points ne donnent rien. On dit que ce sont des points *virtuels* et la courbe qui les joindrait se nomme la courbe virtuelle d'ombre, tandis que

l'autre est la courbe réelle. Il en reste trois, les points f , d et c . Les points d et f sont des points de l'ombre extérieure, et le point c un point de l'ombre intérieure.

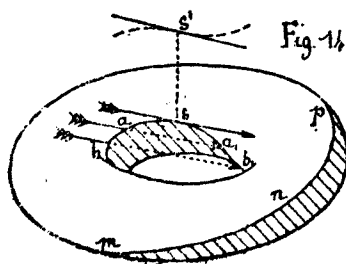
Enfin, la tangente c , prolongée, vient recouper en c_1 la courbe de section.

Le point c_1 appartient à l'ombre *autoportée*, c'est-à-dire à l'ombre portée par la surface sur elle-même.

Un troisième plan (fig. 13), mené par le centre, donnera, comme section, deux cercles; quatre points de tangence, h , g , k , l , dont un, le point l , sera *virtuel*, c'est-à-dire inutile. Il donnera, en outre, un point h_1 de la courbe d'ombre *autoportée*.

En multipliant les plans sécants, nous multiplierons les points de toutes ces courbes. On les joindra par des lignes continues, et le problème sera résolu.

La figure perspective 14 donne une idée des courbes d'ombre du tore.



On voit :

En m , n , p , la courbe d'ombre propre extérieure;

En b , a , s , la courbe intérieure;

En s , a_1 , b_1 la courbe d'ombre *autoportée*.

21. POINTS DE PASSAGE.

On remarquera qu'en s , la courbe d'ombre propre se rencontre avec la courbe d'ombre *autoportée*.

Ce point se nomme *un point de passage*. Dans le tore il y en a deux.

Nous avons figuré en s' au-dessus, la section qu'eût faite le plan sécant qui eût donné ce point.

Pour bien comprendre ce qui se passe, reportons-nous à la figure 12, le rayon c venait recouper la section en c_1 . Or, imaginons que c se rapproche de c_1 jusqu'à se confondre avec lui. Nous aurons ce qui se passe en s' (fig. 14), la courbe présente une inflexion au point s' , et le rayon lumineux est précisément la tangente en ce point d'inflexion.

Nous admettrons, sans le démontrer, le théorème suivant :

Théorème. — Aux points de passage, c'est-à-dire aux points où l'ombre propre se rencontre avec l'ombre autoportée :

1° Les deux courbes se raccordent, c'est-à-dire sont tangentes entre elles ;

2° Elles sont toutes deux tangentes au rayon lumineux (aussi bien dans l'espace qu'en projection).

22. Problème. — La courbe d'ombre propre d'une surface étant tracée, déterminer, le point de passage, c'est-à-dire l'origine de la courbe d'ombre autoportée.

Ce problème, difficile à traiter d'une manière tout à fait exacte, se résoudra cependant d'une manière suffisante en appliquant le théorème précédent.

Lorsque nous aurons reconnu qu'une surface doit avoir une ombre autoportée, nous chercherons d'abord son ombre propre. En général, la courbe que nous trouverons ainsi sera virtuelle dans une certaine étendue. Quand nous en aurons les deux projections, nous mènerons à ces projections les tangentes parallèles au rayon lumineux et nous aurons les points de passage.

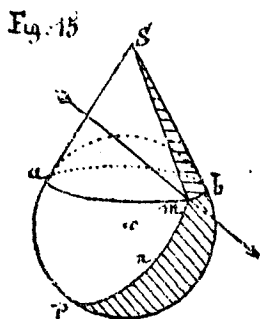
Comme vérification, le point de tangence en projection horizontale et celui en projection verticale, devront se trouver sur une même ligne de rappel, perpendiculaire à la ligne de terre.

23. MÉTHODE DES SURFACES CIRCONSCRITES.

On sait que deux surfaces sont circonscrites l'une à l'autre, lorsqu'elles se raccordent tout le long d'une ligne droite ou

courbe, c'est-à-dire lorsqu'elles ont les mêmes plans tangents en tous les points de cette courbe.

Exemple. — Une sphère (fig. 15) peut se raccorder à un cône s, a, m, b , tout le long du parallèle a, m, b . On dit que le cône est circonscrit à la sphère et que la sphère est inscrite dans le cône. La courbe a, m, b est la courbe de contact des deux surfaces.



De même (fig. 16) on peut circoncrire un cylindre à la sphère.

Dans ce cas, la courbe de contact est un grand cercle a, m, b de la sphère. La sphère est dite inscrite dans le cylindre.

On peut aussi inscrire une sphère (fig. 17) dans un tore.

La courbe de contact est encore un grand cercle s, a, q de la sphère.

24. THÉORÈME SUR LES SURFACES CIRCONSCRITES.

Lorsque deux surfaces A et A' sont circonscrites l'une à l'autre, le point de rencontre de la ligne d'ombre propre de la surface A avec la courbe de contact des deux surfaces est aussi un point de la courbe d'ombre de la deuxième surface A' .

En effet, fig. 15, soit le cône S , circonscrit à la sphère O .

Soit amb la courbe de contact.

Soit Sm la ligne d'ombre propre du cône.

En m , le point de cette ligne situé sur la courbe de contact.

Au point m , le rayon lumineux est tangent au cône, puisque m est un point de l'ombre propre du cône.

Mais en m , le cône et la sphère ont même plan tangent, puisque m est sur la courbe de contact et que par hypothèse le cône et la sphère ont les mêmes plans tangents en tous les points de la courbe de contact. Donc, le rayon lumineux est aussi tangent à la sphère. C'est donc, pour la sphère, un rayon tangent *rasant*, et par conséquent m appartient aussi à la ligne d'ombre propre de la sphère.

Fig. 16

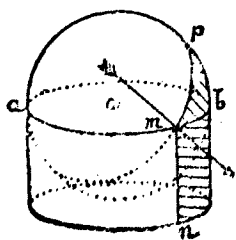


Fig. 16. La sphère o_1 et le cylindre circonscrit ont comme courbe de contact le grand cercle amb .

La ligne d'ombre propre du cylindre est la

génératrice mn ; elle coupe en m la courbe de contact. m est un point de l'ombre propre de la sphère.

Le rayon lumineux qui passerait en m serait donc tangent aux deux surfaces; il serait rasant pour chacune d'elles, et par suite m appartient aux deux lignes d'ombre propre.

Fig. 17

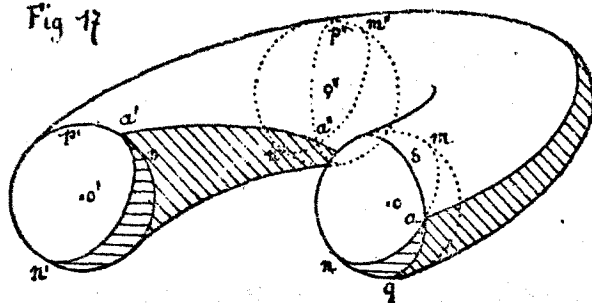


Fig. 17. On verra de même que la sphère o inscrite dans le tore suivant la courbe de contact saq , ayant sa ligne d'ombre man qui rencontre en a la ligne de contact, le point

a appartient à l'ombre propre du tore.

De même a' pour la sphère o'

Et a'' pour la sphère o'' .

25. MÉTHODE DES SURFACES CIRCONSCRITES.

Il est facile de se rendre compte de l'application que nous ferons de ce théorème.

Lorsque nous voudrions trouver l'ombre propre d'une surface quelconque, nous lui circonscrivons une surface plus simple, un cône, un cylindre, ou une sphère, peu importe, dont nous saurons facilement trouver : 1° la ligne d'ombre, et 2° la courbe de contact avec la surface donnée.

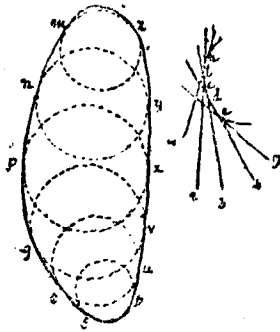
Nous prendrons les points où ces deux dernières lignes se couperont, et nous aurons des points de la ligne d'ombre propre de la surface donnée.

En répétant cette opération un nombre suffisant de fois, nous aurons assez de points de la courbe d'ombre cherchée pour pouvoir la tracer.

26. COURBES-ENVELOPPES. — DÉFINITION.

Si nous imaginons plusieurs courbes (des cercles, par exemple) assez voisins les uns des autres, on pourra tracer une courbe continue, qui sera tangente en $mnpq \dots yz$ à chacun de ces cercles. Cette courbe est dite la courbe-enveloppe, ou simplement l'enveloppe des cercles. On dit que les cercles sont enveloppés par la courbe $mnp \dots$

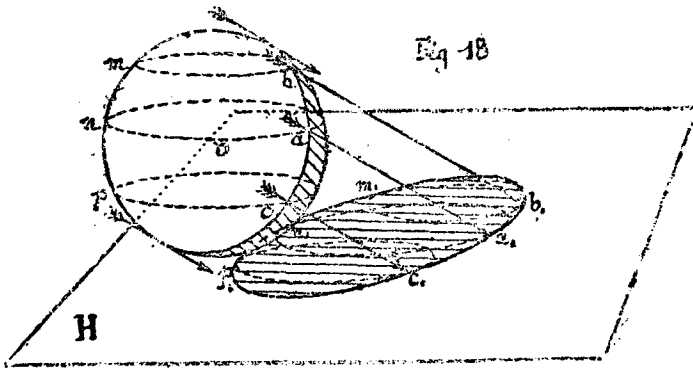
Au lieu de cercles, nous pourrions imaginer d'autres courbes et même des droites.



Ainsi les droites 1.2.3.4.5 admettent comme enveloppe la courbe *a.b.c.d.e*, à laquelle elles sont toutes tangentes. On voit même, d'après cela, qu'une courbe quelconque est toujours l'enveloppe de ses tangentes.

27. MÉTHODE DES OMBRES PORTÉES ET DES ENVELOPPES.

Soit *o*, fig. 18, un corps (une sphère, par exemple), dont nous désirons trouver l'ombre propre.



Nous tracerons sur cette sphère une série de courbes faciles à dessiner, des cercles par exemple, *mb*, *na*, *pc*, parallèles ou non, peu importe.

Nous prendrons un plan auxiliaire *H*, ou toute autre surface auxiliaire, en profitant, bien entendu, de celles que les exigences du dessin nous imposeront, et sur lesquelles les opérations suivantes seront le plus faciles à effectuer.

Sur ce plan, nous chercherons l'ombre portée par les courbes tracées sur le corps. Soient n_1a_1 , m_1b_1 , p_1c_1 ces ombres portées.

Nous tracerons leur courbe-enveloppe $a_1 b_1 c_1$ tangente en a_1 , b_1 et c_1 aux premières. Nous admettrons sans démonstration :

1° Que cette courbe-enveloppe est l'ombre portée par le corps ;

2° Que si, des points de tangence $a_1 b_1 c_1$, nous remontons par le rayon lumineux jusqu'aux points $a. b. c.$ des courbes dont ils sont les ombres, la courbe qui joindra les points $a_1 b_1 c_1$ sera la ligne d'ombre propre ~~de la~~ surface.

28. APPLICATION DE CETTE MÉTHODE.

Ce principe admis, on voit que, pour trouver par cette méthode l'ombre propre d'une surface, 1° on prendra sur cette surface des lignes faciles à déterminer, des droites si l'on peut, des cercles s'il est possible ; 2° on cherchera l'ombre portée par ces lignes sur une autre surface, ordinairement sur un plan, et même, de préférence, sur un des plans de projection ; 3° on prendra l'enveloppe de ces ombres portées, et on déterminera aussi exactement que possible les points de tangence de l'enveloppe et des enveloppées. On aura ainsi l'ombre portée par la surface, et par suite son cylindre d'ombre ; 4° on remontera par les rayons lumineux inverses de ces points de tangence aux points de l'espace situés sur les lignes choisies d'abord sur la surface, et l'on aura ainsi des points de l'ombre propre.

29. TROUVER, PAR LA MÉTHODE DES OMBRES PORTÉES, L'OMBRE D'UNE SURFACE SUR UNE AUTRE.

Cette méthode donne, aussi bien que celle des plans sécants, la solution générale du problème des ombres.

En effet.

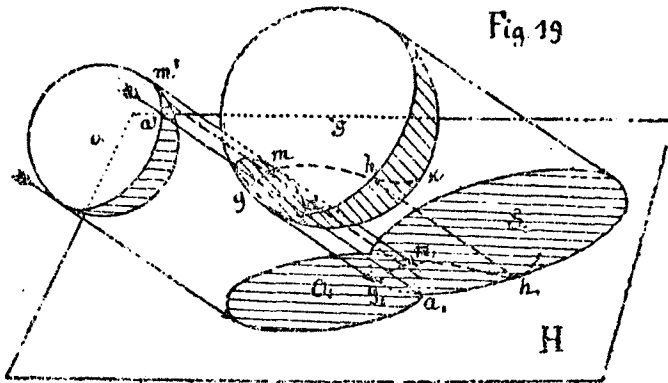
Soient o et S des sphères, fig. 19, ou deux corps quelconques ; nous voulons trouver : 1° leurs ombres propres ; 2° l'ombre portée par la première sur la seconde.

Nous cherchons d'abord, par la méthode précédente, les ombres portées en $O.$ et $S.$ sur un plan auxiliaire H par chacun des deux corps. Les courbes ainsi obtenues sont les ombres portées, sur ce plan auxiliaire, des lignes d'ombre propre des deux surfaces.

On en déduit, comme ci-dessus, ces courbes d'ombre propre.

On veut alors trouver l'ombre portée par la surface O sur la surface $S.$

Soit $g.m.h.k.$ une des courbes de la surface S . qui nous a servi pour faire ce qui précède, nous supposons qu'elle porte ombre sur le plan auxiliaire en $g_1m_1h_1$.



Prenons le point m_1 où elle rencontre la ligne o_1 , ombre de la première surface, et construisons le rayon lumineux inverse m' , m . m_1 qui aboutirait à ce point.

m_1 étant sur la courbe l'ombre portée de la première surface, est l'ombre du point m . de la courbe d'ombre propre de cette surface. m_1 étant aussi sur l'ombre de la courbe ghk , est l'ombre d'un point m de cette courbe. Donc, le rayon qui passe par m' passe aussi par m et par suite le point m est l'ombre portée sur la deuxième surface par le point m' de la première.

Nous choisirons d'autres courbes de la deuxième surface S ; nous chercherons, ce qui a dû être fait précédemment, leurs ombres portées sur le plan auxiliaire. Nous prendrons les points où ces dernières lignes coupent la courbe o_1 d'ombre portée par la première surface et, remontant sur la surface S , par des rayons inverses aux points correspondants des courbes choisies, nous aurons des points de l'ombre portée par la surface O sur la surface S .

30. POINT DE PERTE.

REMARQUE. Les deux courbes d'ombres portées O_1 et S_1 se coupant en a_1 en remontant de a_1 en a , sur l'ombre propre de S , nous aurons le point de rencontre de l'ombre portée et de l'ombre propre. En ce point l'ombre portée se perd dans l'ombre propre. Nous appellerons ce point un point de *Perte*. Il a quelque analogie avec les *points de passage* définis plus haut.

31. TRAVAIL DES ÉLÈVES POUR LA PROCHAINE LEÇON.

Pour la prochaine leçon, les élèves devront exécuter, au crayon d'abord, puis à l'encre, les figures de la planche 1, en copiant aussi fidèlement que possible le modèle.

Les figures données en perspective ne constituent pas, à proprement parler, des épures ; cependant il est utile de les mettre au net ; les principes dont elles sont l'image se graveront mieux ainsi dans l'esprit.

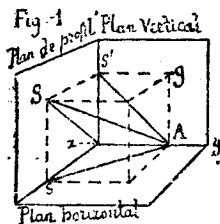
2° LEÇON.

OMBRES DU CONE, DU CYLINDRE, DE LA SPHÈRE.

1. LE RAYON A 45° ET LE CUBE DE LUMIÈRE.

Nous avons dit qu'en dessin géométrique on supposait toujours les rayons parallèles. Il faut donc définir une fois pour toutes la direction de ces rayons. On les suppose à 45°.

Imaginons (fig. 1, pl. 2) un cube $SS'A$, placé de manière à s'appuyer sur les deux plans de projection et sur un plan de profil.



Menons la diagonale SA .

Caractérisée ainsi :

Elle est dirigée de haut en bas ;
— de gauche à droite ;
— d'arrière en avant.

Parmi les quatre diagonales du cube, il n'y en a donc qu'une seule qui satisfasse à ces trois conditions.

Les rayons lumineux seront tous parallèles à cette droite.

Nous dirons que les rayons sont parallèles à la diagonale d'un cube. Et nous appellerons ce dernier, le *cube de lumière*.

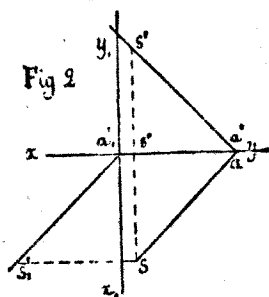
On remarquera que les arêtes de ce cube sont :

Parallèles à la ligne de terre ;
Perpendiculaires au plan horizontal ;
Ou perpendiculaires au plan vertical.

2. PROJECTIONS DU RAYON A 45°.

Étudions les projections du rayon sur les deux plans de projections et sur un plan de profil $x_1' y_1'$ pris comme nouveau

plan vertical. La diagonale du cube se projettera, dans ces cas, suivant les diagonales du carré (fig. 2).



C'est-à-dire en faisant des angles de 45° avec la ligne de terre. (C'est pourquoi on l'a nommé le rayon à 45°).

3. RABATTEMENTS DU RAYON A 45° .

Nous aurons souvent besoin de regarder le rayon lumineux et les objets que nous voudrions éclairer, en les projetant sur d'autres plans de projection que ceux qui sont choisis ci-dessus ; ou bien après les avoir fait tourner jusqu'à ce que le rayon soit devenu parallèle au plan vertical.

Nous étudierons :

- 1° Le rayon rendu, par rotation, parallèle au plan vertical ;
- 2° Rabatté sur le plan horizontal ;
- 3° Rabatté sur le plan vertical.

4. RAYON RENDU PAR ROTATION, PARALLÈLE AU PLAN VERTICAL.

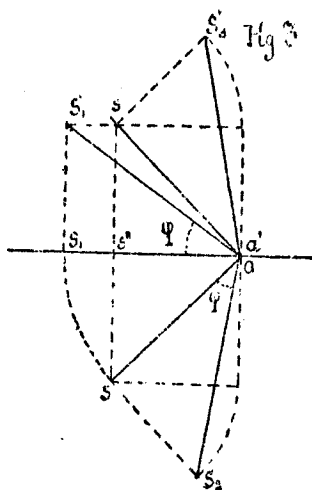
Considérons le plan S, s, A (fig. 1), qui est un plan diagonal du cube et qui est en même temps le plan projetant horizontalement le rayon.

Faisons tourner ce plan autour de la ligne AG, suivant laquelle il coupe le plan vertical, jusqu'à ce qu'il s'applique sur ce plan vertical (voir fig. 3). Le point aa' ne bouge pas, comme étant sur la charnière, le point SS' sommet du cube, décrit le cercle S'S₁, en projection horizontale, jusqu'à ce que s vienne sur la ligne de terre. D'ailleurs, le point S de l'espace, restant toujours dans ce mouvement, a la même distance au-dessus du plan horizontal, la projection verticale décrit une parallèle S₁'S₁' à la ligne de terre.

S₁'a' est la nouvelle projection verticale du rayon lumineux.

L'angle S₁' a' S₁ qu'il fait avec la ligne de terre, est l'angle

qu'il faisait avec sa projection. Nous désignerons cet angle par la lettre grecque φ (phi). Et nous appellerons rayon φ le rayon ainsi rendu.



5. RAYON RABATTU SUR LE PLAN HORIZONTAL.

Reprenons le plan S, s, A (fig. 1), projetant horizontalement le rayon, et rabattons-le autour de la trace horizontale s, A , comme charnière.

Le joint A ne bouge pas.

Le point S (fig. 3) vient en S_2 sur une perpendiculaire s, S_2 à s, a , à une distance égale à la cote de hauteur du point S . Mais cette cote est mesurée en projection verticale par $S'S''$, donc on aura $S_2s, S'S''$.

Le rayon sera rabattu en aS_2 , et l'angle S_2aS sera encore égal à l'angle φ .

Remarque. — On aura souvent besoin de changer le plan vertical de projection et de le prendre parallèle au rayon lumineux. Alors, la nouvelle ligne de terre qui définira ce nouveau plan vertical, devra être parallèle à la projection horizontale s, a du rayon, et le rayon lumineux se projettera sur le nouveau plan vertical, en faisant l'angle φ avec la nouvelle ligne de terre.

6. RAYON RABATTU SUR LE PLAN VERTICAL.

Si, au lieu de rabattre le plan projetant le rayon horizontalement, nous rabattons sur le plan vertical, le plan proje-

tant verticalement le rayon, nous prenions $S'a'$ pour charnière (fig. 3);

Le point a' ne bougerait pas;

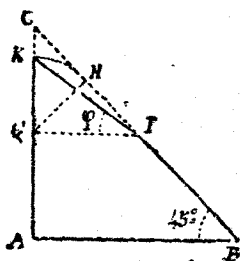
Le point S viendrait se rabattre en S'_3 , à une distance $S'S'_3$ égale à son éloignement, c'est-à-dire égale à SS'' .

L'angle $S'_3 a' s'$ serait encore égal à l'angle φ .

7. L'ANGLE φ . — ÉQUERRE A L'ANGLE φ .

Remarque. — On voit que l'angle φ est l'angle aigu d'un triangle rectangle, dont un côté de l'angle droit serait égal au côté d'un carré, tandis que l'autre serait égal à la diagonale de ce même carré.

Fig. 3 bis.



Nous engageons les élèves à fabriquer eux-mêmes une équerre analogue à celle qui est figurée ci-contre, fig. 3 bis. Ils prendront une équerre à 45° , ABC, par le milieu I de l'hypothénuse ils mèneront IG, parallèle à AB. Ils traceront, de G

comme centre, l'arc HK. Joignant KI, l'angle GIK sera égal à l'angle φ .

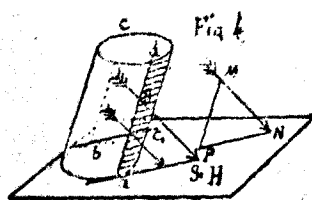
Ils recouperont ensuite, avec un canif, leur équerre suivant la ligne KI, et achèveront de dresser cette ligne en usant la branche de l'équerre sur du papier de verre fin, placé à plat sur une planche bien droite, ou mieux encore, sur le marbre d'une cheminée.

En effet, GK est le côté du carré dont GI est la diagonale.

Cette équerre leur rendra dans la suite de très-grands services. Elle leur donnera à volonté l'angle à 45° ou l'angle φ .

8. OMBRE PROPRE D'UN CYLINDRE QUELCONQUE.

Soit (fig. 4) un cylindre quelconque dont la base est supposée être une courbe (cercle, ellipse ou autre), tracée sur un plan H.



Par un point M quelconque de l'espace, menons une parallèle MP aux génératrices du cylindre, et un rayon MN.

Soit P et N, les points où ces deux droites percent le plan de base du cylindre.

N est l'ombre portée par le point M, et PN est l'ombre portée sur le plan II par la droite MP.

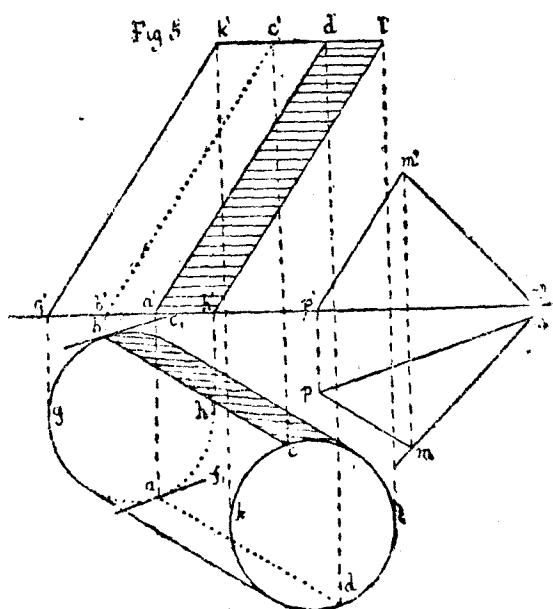
Enfin, menons les deux tangentes à la base du cylindre ag_1 bc_1 parallèles à cette ombre PN.

Je dis que les génératrices ad et bc du cylindre, qui passent par les points de tangence a et b , sont les lignes d'ombre propre du cylindre.

En effet, ag_1 est évidemment l'ombre portée par ag , et bc_1 l'ombre portée par bc . Or, toute autre génératrice que ag , ou que bc , portera ombre dans l'intérieur de l'ombre de ces deux dernières et parallèlement à elles. Donc, ces deux droites ag_1 et bc_1 forment les limites de l'ombre portée par le cylindre. En vertu du principe des ombres portées et des enveloppes (1^{re} leçon) ag_1 et bc_1 forment l'ombre portée par le cylindre, et les deux lignes ad et bc du cylindre, dont elles sont l'ombre, sont les lignes d'ombre propre de ce cylindre.

9. ÉPURE DE L'OMBRE PROPRE D'UN CYLINDRE QUELCONQUE.

Soit (fig. 5) un cylindre dont la base inférieure est un cercle gh , situé dans le plan horizontal et projeté en $g'h'$ sur la ligne de terre, et dont la base supérieure est un autre cercle



kl , kl' parallèle au premier. Le contour apparent de ce cylindre s'obtient en menant les tangentes aux deux cercles en projection horizontale, et en joignant $g'k'h't'$, en projection verticale.

Le rayon lumineux est à 45° . On veut trouver l'ombre propre du cylindre.

Appliquons la construction indiquée ci-dessus. On prend un point quelconque mm' . Par ce point on mène :

$mp, m'p'$, parallèle aux génératrices du cylindre, et $mn, m'n'$, parallèle au rayon lumineux.

On prend les traces horizontales p et n de ces deux droites ; la ligne pn est l'ombre portée sur le plan horizontal par la droite $mp, m'p'$.

On mène les deux tangentes bc et af à la base du cylindre, parallèlement à la droite pn .

Par les points de tangence b et a on mène les génératrices $bc, b'c'$ et $ad, a'd'$ du cylindre, ce sont les lignes d'ombre propre de ce cylindre.

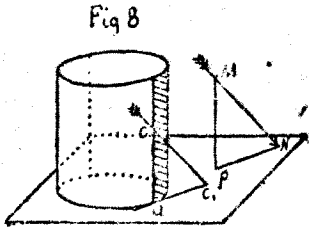
On se rendra facilement compte des parties vues et cachées, et de la portion qui est dans l'ombre.

10. OMBRES DE CYLINDRES A GÉNÉRATRICES PARALLÈLES AUX ARÊTES DU CUBE.

L'épure se simplifie lorsque le cylindre est perpendiculaire au plan horizontal de projection.

Soit (fig. 8) en perspective un cylindre perpendiculaire au plan horizontal.

Prenons comme tout à l'heure un point M dans l'espace et menons MP parallèle au cylindre, et MN parallèle au rayon lumineux. PN est l'ombre portée de MP sur le plan de base. Il faut mener à la base du cylindre deux tangentes parallèles à PN .



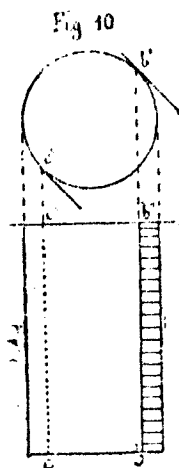
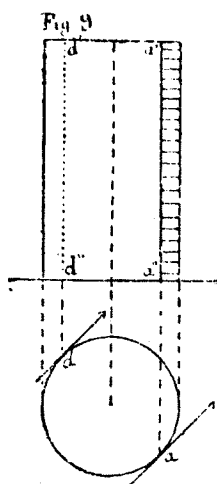
Soit ac , l'une d'elles. La génératrice ac est une des deux lignes d'ombre propre.

Mais on remarquera que MP étant perpendiculaire au plan horizontal, la ligne PN est précisément la projection horizontale du rayon lumineux MN .

D'où il résulte que, dans le cas (fig. 9) où le cylindre est perpendiculaire au plan horizontal, il suffit pour avoir l'ombre propre de mener à la base du cylindre les tangentes parallèles à la projection horizontale du rayon lumineux, c'est-à-dire, dans le cas actuel, des tangentes à 45° .

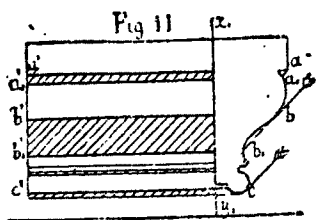
Exemple (fig. 9) : On a mené au cercle de base les tangentes

à 45° , en a et en d , et on a eu, en $a'a''$ et $d'd''$ les lignes d'ombre propre en projection verticale. La seconde est cachée.



Si le cylindre (fig. 10) est perpendiculaire au plan vertical, c'est en projection verticale que l'on mènera à sa base des tangentes à 45° .

Si le cylindre est parallèle à la ligne de terre, comme dans les moulures données fig. 11, alors, en prenant un nouveau plan de projection de profil $x_1 y_1$, qui donnera les moulures en coupe $a, b, c...$. Par rapport à ce plan, le cylindre complexe qui constitue les moulures lui est perpendiculaire. Nous rentrons dans un des deux cas précédents.



Mais nous savons que, sur un plan de profil, le rayon ordinaire est aussi projeté à 45° . Donc, en menant les lignes aa_1, bb_1, cy_1 tangentes au profil, ou passant par les points en saillie, nous aurons comme ci-dessus des lignes d'ombre.

Remarque. Ici les lignes b et c sont des lignes d'ombre propre, les lignes a_1 et b_1 sont des lignes d'ombres portées par la moulure sur elle-même.

Nous résumerons ce paragraphe en disant :

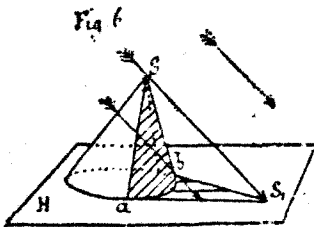
Pour tous les cylindres parallèles aux arêtes du cube de lumière, les ombres se tracent à 45° . Cet énoncé, peu clair en lui-même, se comprend suffisamment après ce qui vient d'être dit.

11. REMARQUE PRATIQUE SUR LA POSITION DE LA LIGNE D'OMBRE D'UN CYLINDRE.

Les cylindres droits à base circulaire, dans une des trois directions qui viennent d'être indiquées, se présentent très-souvent dans le dessin. Il peut être utile de savoir tracer immédiatement leur ombre sans faire l'épure. Or, en calculant sa position, on trouve que cette ligne d'ombre se trouve très-sensiblement aux $\frac{7}{10}$ du rayon à partir du centre ou aux $\frac{3}{10}$ à partir du contour apparent, résultat numérique important à se rappeler.

12. OMBRE PROPRE D'UN CONE QUELCONQUE.

Soit S un cône quelconque, vu en perspective, H le plan de sa base, qui peut être un cercle ou toute autre courbe. (fig. 6.)



Par le sommet S, menons le rayon lumineux SS_1 jusqu'en S_1 où il percute le plan de base. S_1 est l'ombre portée par le sommet du cône.

Par S_1 , menons, si cela est possible, les deux tangentes à la base du cône, et soit S_1a , S_1b , ces deux tangentes.

De même que pour le cylindre on

verra :

1° Que $S_1a - S_1b$, sont les limites de l'ombre portée du cône sur le plan H, et par suite forment la ligne d'ombre portée de ce cône ;

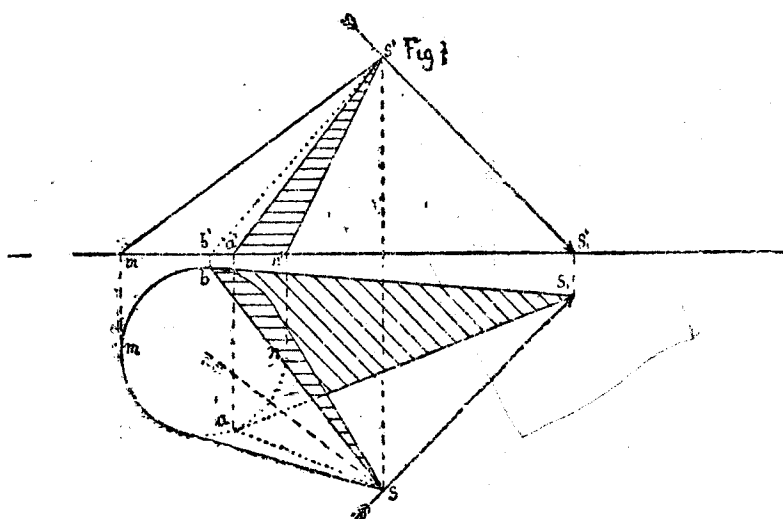
2° Que S_1a et S_1b sont les ombres des deux génératrices du cône Sa et Sb qui passent par les points de tangence a et b ;

3° Que, par conséquent, en vertu du principe des ombres portées et des enveloppes, les deux génératrices Sa , Sb sont les lignes d'ombre propre du cône.

Remarque. — Si le point S_1 , ombre portée du sommet, était tombé dans l'intérieur de la base du cône, il eût été impossible de mener deux tangentes à cette base, et, par conséquent, le cône n'aurait eu ni ombre portée, ni ombre propre. Il eût été éclairé en entier, quoique à des degrés différents en ses diverses parties.

13. ÉPURE DE L'OMBRE PROPRE D'UN CÔNE QUELCONQUE (fig. 7).

Soit mn , $m'n'$ la base circulaire d'un cône. Nous la supposons sur le plan horizontal.



SS son sommet. Ses contours apparents s'obtiennent verticalement en joignant $S'm'$, $S'n'$, et horizontalement en menant de S les deux tangentes à la base, en projection horizontale.

Nous voulons trouver l'ombre propre de ce cône.

Appliquons ce qui vient d'être dit. Par SS' menons un rayon lumineux SS_1 , $S'S'_1$, prenons sa trace horizontale $S_1S'_1$.

Ce point est l'ombre portée par le sommet du cône sur le plan de base.

Du point S_1 menons les deux tangentes S_1a , S_1b à la base, et nous aurons en Sa , $S'a' - Sb$, $S'b'$ les lignes d'ombre propre du cône.

La portion bS_1a , sur le plan horizontal, sera l'ombre portée par le cône sur ce plan.

14. OMBRES PROPRES DE CONES A AXES PARALLÈLES AUX ARÊTES DE CUBE.

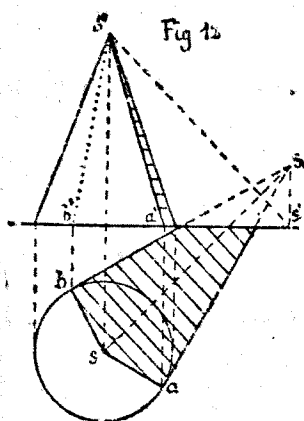
Nous étudierons les cônes de révolution dont l'axe sera perpendiculaire au plan horizontal. Les résultats trouvés s'appliqueront évidemment aux cônes dont les axes seraient per-

pendiculaires au plan vertical ou parallèles à la ligne de terre, en un mot, dont les axes seraient parallèles aux arêtes du cube.

1^o Cône à angle quelconque, plus grand que 45° (fig. 12).

Soit SS' le sommet.

Menons le rayon lumineux SS_1 , $S'S'_1$; prenons sa trace horizontale S_1 , S'_1 . Menons par ce point S_1 les deux tangentes S_1a , S_1b à la base.



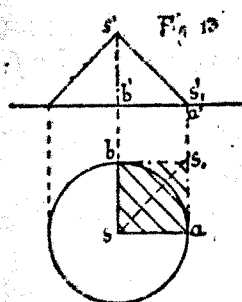
L'ombre propre est formée des deux droites Sa , $S'a'$ Sb , $S'b'$. Cette dernière est cachée en projection verticale.

Remarque. — En projection verticale, l'ombre $S'a'$ est assez près du contour apparent de droite, sans cependant se confondre avec lui.

2^o Cône à 45° (fig. 13).

La même construction donne l'ombre portée du sommet en S_1 ; et les deux tangentes en S_1a , S_1b .

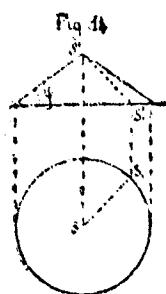
La tangente S_1a est perpendiculaire à la ligne de terre, l'autre lui est parallèle. Les deux génératrices d'ombre propre Sa , Sb sont à l'angle droit l'une sur l'autre en projection horizontale. Tandis qu'en projection verticale $S'a'$ est précisément le contour apparent de droite du cône. Donc, dans le cas du cône à 45° , l'ombre est tout entière cachée en projection verticale.



En élévation, le cône ne paraît pas avoir d'ombre propre.

3^o Cône à l'angle φ .

Si le cône a ses génératrices faisant avec le plan horizontal l'angle φ , alors (fig. 14) le rayon lumineux mené par le sommet



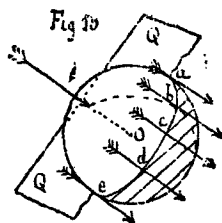
du cône, ne quitte pas la surface du cône. Sa trace horizontale est le point S_1S' situé sur la base même du cône. Il n'est pas possible de mener deux tangentes, mais une seule. L'ombre propre se réduit à la seule droite SS_1 , $S'S'_1$.

4° Cône à angle plus petit que φ .

Alors l'ombre du sommet tombera dans l'intérieur du cône. Il sera impossible de mener deux tangentes à la base. Le cône n'aura pas d'ombre propre et sera tout entier dans la lumière.

15. OMBRE PROPRE DE LA SPHÈRE.

(Fig. 15). Soit une sphère O figurée en perspective. Prenons le rayon lumineux qui, prolongé, passerait par le centre de la



sphère. Menons par ce centre un plan Q perpendiculaire au rayon ; il coupera la sphère suivant un grand cercle $a.b.c.d.e.f.$ qui sera l'ombre propre de la sphère.

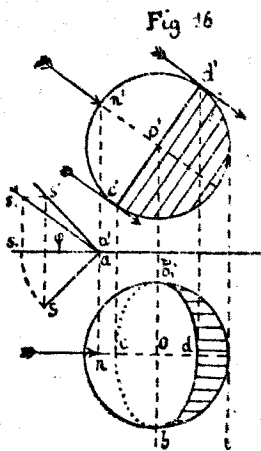
Pour le prouver, menons par un de ces points le point b , par exemple, un rayon lumineux, il sera tangent à la sphère.

En effet, étant perpendiculaire au plan du grand centre $a.b.c.d.$, il l'est aussi au rayon ob .

Et nous savons que toute droite perpendiculaire au rayon d'une sphère est tangente aussi à la sphère.

En résumé. L'ombre propre d'une sphère est le grand cercle de cette sphère, dont le plan est perpendiculaire au rayon lumineux,

16. ÉPURE DE L'OMBRE PROPRE D'UNE SPHÈRE ÉCLAIRÉE PAR DES RAYONS PARALLÈLES AU PLAN VERTICAL.



(Fig. 16). Nous supposons pour simplifier, dans une première épure, que les rayons sont à l'angle φ , c'est-à-dire parallèles au rayon à 45° rendu par une rotation en S_1 a S'_1 a' , parallèle au plan vertical.

L'ombre propre s'obtiendra en coupant la sphère par un plan passant par son centre et perpendiculaire au rayon lumineux.

Mais ce rayon étant parallèle au plan vertical, le plan de la ligne d'ombre, qui est perpendiculaire au rayon, sera perpendiculaire au plan vertical, et par conséquent la courbe sera projetée verticalement tout

entière suivant une ligne droite $c'o'd'$ perpendiculaire au rayon lumineux $n'o'$.

Connaissant la projection verticale, nous en déduirons facilement l'autre projection.

Le problème revient, en effet, à figurer en projection horizontale, un cercle perpendiculaire au plan vertical : problème connu.

La projection sera une ellipse, le petit axe sera cd et le grand axe bb_1 . On remarquera que le grand axe est perpendiculaire au rayon lumineux, tandis que le petit axe lui est parallèle. On aura soin de bien raccorder tangentiellement l'ellipse d'ombre avec le cercle de contour apparent de la sphère.

17. SPHÈRE ÉCLAIRÉE PAR LE RAYON A 45° .

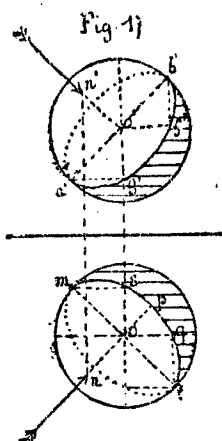
Prenons la sphère précédente et faisons-la tourner avec le rayon φ , jusqu'à ce que ce dernier ait repris la position de 45° .

La projection horizontale ne changera que de position, mais nullement de forme (Fig. 17).

Nous reconstruirons donc en $mq.st$. la même ellipse, mais ayant tourné de 45° , et nous aurons l'ombre en projection horizontale.

Pour l'avoir en projection verticale, nous pourrions faire tourner, d'après la méthode des rotations, tous les points de la première; mais il est préférable de remarquer qu'à cause

de la symétrie du rayon lumineux de 45° par rapport aux deux plans de projection et à cause aussi de la symétrie de la sphère dans toutes les directions, l'ombre en projection verticale sera



la même qu'en projection horizontale, tournée seulement d'une manière différente. En projection horizontale, le grand axe était perpendiculaire à la projection horizontale du rayon lumineux; sur le plan vertical, il le sera à la projection verticale du même rayon.

18. REMARQUES PRATIQUES.

Il peut être utile, sans faire l'épure, de tracer l'ellipse d'ombre.

1^o Le calcul montre que op , petit axe de l'ellipse, est très-sensiblement les $\frac{3}{5}$ de R , le rayon.

2^o On prouvera dans la suite que si, des extrémités m et t du grand axe, on abaisse les perpendiculaires ms , tq sur les droites menées par le centre, parallèlement ou perpendiculairement à la ligne de terre, on aura les points q et s de l'ellipse.

De même, en projection verticale, on obtiendra les points q et f' .

18 bis. USAGE DE LA SPHÈRE

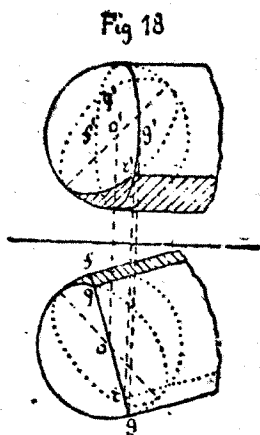
pour la détermination de l'ombre des cônes et des cylindres dans des positions quelconques.

Nous avons montré (1^{re} leçon, méthode des surfaces circon-

scrites), comment la connaissance de l'ombre propre d'une surface entraîne la connaissance d'un point de l'ombre de toute autre surface qui lui serait circonscrite.

Connaissant l'ombre d'une sphère, tout cylindre ou tout cône circonscrit à cette sphère aura un point de son ombre au point où la courbe d'ombre de la sphère rencontrera la courbe de contact des deux surfaces. Or, comme l'ombre d'un cône ou d'un cylindre est toujours une ligne droite, la connaissance d'un seul point de l'ombre entraînera celle de l'ombre tout entière.

Appliquons cela à un cylindre, parallèle au plan horizontal, mais *oblique* au plan vertical (fig. 18).



La courbe de contact de ce cylindre avec la sphère sera, en projection hori-

zontale, la droite fg , et, en projection verticale, l'ellipse $f'g'q'r'$.

Traçons l'ellipse d'ombre de la sphère en projection horizontale. La droite fg coupe cette ellipse en projection horizontale aux deux points q et r .

Par ces points passent les génératrices d'ombre propre du cylindre en projection horizontale. La droite d'ombre qui passe par r est cachée, l'autre est vue.

En projection verticale, l'ellipse d'ombre propre coupe l'ellipse de contact en r' , et q .

Les droites d'ombre du cylindre passent par r' et q' .

Vérification. r et r' doivent être sur une même ligne de rappel, ainsi que q et q' .

Nous ferons, par la suite, des applications très-fréquentes du raccordement avec la sphère, pour la détermination, non-seulement des lignes d'ombre des corps ronds, mais encore des lignes de séparation des teintes, dans la théorie du lavis.

19. TRAVAIL DES ÉLÈVES.

Pour la prochaine leçon, les élèves feront les épures de la planche 2.

Si le professeur le juge convenable, il les autorisera à faire à l'encre rouge, en traits pleins, les lignes de construction, celles qui sur la planche sont faites en trait pointillé.

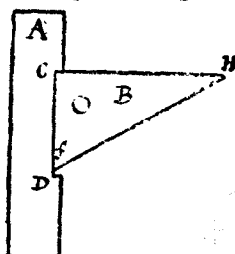
En tout cas, ces épreuves seront faites avec la plus grande exactitude. Il ne s'agit pas de faire des dessins à peu près, mais très-rigoureux.

Les ombres seront indiquées par des hachures espacées de 1^{mm} , et non pas par une teinte.

Pour faire les hachures, les élèves feront bien de fabriquer le petit instrument dessiné ci-contre, avec une règle et un équerre hors de service.

A, règle plate.

B, petite équerre.



Une encoche CD a été pratiquée dans la règle et un peu plus longue que le bord correspondant de l'équerre.

La différence fD est précisément la largeur que l'on doit donner aux hachures; ici, ce sera 1^{mm} .

On se sert ainsi de cet appareil :

1^{er} temps. Dans la position ci-contre, on trace une droite sur le côté CH de l'équerre.

2^e temps. On fixe la main sur la règle ; on descend l'équerre jusqu'en D.

3^e temps. On fixe la main sur l'équerre et on descend la règle jusqu'au contact en C, et on trace un nouveau trait.

La distance des deux traits est exactement la différence fD .

On continue ensuite en répétant cette opération autant de fois qu'il sera nécessaire.

3^e LEÇON.

OMBRES DES CORPS RONDS.

Comme application des deux leçons précédentes, nous allons chercher l'ombre de deux surfaces de révolution. L'ellipsoïde, c'est-à-dire la surface engendrée par une ellipse qui tourne autour d'un de ses axes, et le *tore*, c'est-à-dire la surface engendrée par un cercle qui tourne autour d'une droite située dans son plan.

1. OMBRE PROPRE DE L'ELLIPSOÏDE (pl. 3, fig. 1).

Nous chercherons cette ombre en nous appuyant sur la méthode des plans sécants et sur celle des surfaces circonscrites.

Nous ne chercherons pas un point quelconque de l'ombre, mais seulement les points les plus importants et les plus faciles à trouver. Ces points nous permettront cependant de tracer l'ombre avec une exactitude bien suffisante dans la pratique.

2. REPRÉSENTATION DE L'ELLIPSOÏDE ET EN GÉNÉRAL DE TOUTE SURFACE DE RÉVOLUTION. — DÉFINITIONS.

Le plus ordinairement, l'axe de la surface est perpendiculaire au plan horizontal. C'est le cas de la figure 1.

On se donne la courbe méridienne, c'est celle qui, en tournant autour de l'axe, engendrera la surface. On prend d'abord son plan lorsqu'il est parallèle au plan vertical. Elle se projette alors en vraie grandeur sur ce plan. Dans cette position, cette méridienne prend le nom de *méridien principal*, ou méridien de front.

Elle se projette donc en vraie grandeur sur le plan vertical, et en projection horizontale, suivant une ligne droite, parallèle à la ligne de terre,

Ce méridien principal, en tournant autour de l'axe, engendrera la surface de révolution. Dans ses différentes positions, il sera toujours projeté horizontalement suivant une droite passant par le point *o*, pied de l'axe sur le plan horizontal; verticalement, il se projettera suivant une courbe qui variera de forme suivant la position du méridien.

Méridien de profil.

Lorsque le plan du méridien sera devenu perpendiculaire au plan vertical, il sera projeté verticalement suivant une ligne droite, qui est la projection verticale de l'axe. Nous appellerons le méridien, dans cette position, le méridien central ou méridien de profil.

Le méridien peut, en projection horizontale, se placer à 45° dans deux positions.

Dans la première, la projection horizontale sera parallèle à celle du rayon lumineux.

Nous appellerons ce méridien, dans cette position, le *méridien de symétrie*.

Tous les méridiens sont des plans de symétrie, mais celui-ci occupe, dans la surface, une position de symétrie, non-seulement par rapport à la surface, mais par rapport aussi au rayon lumineux. Il est évident que, pour tout rayon lumineux frappant la surface d'un côté de ce plan méridien, il en existera un autre qui la frappera de l'autre côté, exactement de la même manière.

La courbe d'ombre sera donc symétrique par rapport à ce plan. Et le point le plus haut et le plus bas de l'ombre seront les points de la courbe qui seront sur ce *méridien de symétrie* à 45°.

L'autre méridien à 45° ne sera pas un plan de symétrie pour la courbe d'ombre. En projection horizontale, il sera perpendiculaire au rayon lumineux. Nous l'appellerons simplement méridien à 45°. Nous aurons souvent besoin de déterminer sa projection verticale, de même que pour le méridien de symétrie.

Pour avoir cette projection, il suffira de faire tourner de 45° tous les points du méridien principal.

Par exemple, le point nn' du méridien principal viendra, en plan, de n en n_1 (fig. 1).

Verticalement, il ne quittera pas la parallèle $n'p'$ à la ligne de terre. En menant la ligne de rappel $n_1n'_1$, nous aurons la projection verticale n'_1 d'un point de ce méridien.

De même pour tous les autres.

Les points sur l'axe t' et t'' ne bougeront pas.

Le point le plus à droite FF' viendra en gg' et le méridien principal, ayant ainsi tourné, donnera lieu à une ellipse nouvelle $t'g'_1t''$ ayant même grand axe $t't''$, mais un petit axe plus petit $f'o'g'$.

3. PARALLÈLES.

On nomme parallèles, les cercles décrits dans la rotation, par les différents points du méridien.

Les parallèles ont leurs plans perpendiculaires à l'axe, c'est-à-dire parallèles au plan horizontal.

Les parallèles se projettent horizontalement en vraie grandeur, suivant des cercles décrits du pied de l'axe comme centre, et verticalement, suivant des droites perpendiculaires à l'axe, égales en longueur au diamètre de ces parallèles, et limitées à gauche et à droite au *méridien principal*.

Si nous prenons le point FF' , qui est le point du méridien, où la tangente est verticale, c'est-à-dire le point le plus à droite de ce méridien, le parallèle auquel il donnera lieu sera le parallèle *maximum* ou l'équateur de la surface.

Dans le cas du tore, on peut mener au cercle méridien une tangente verticale extérieure et une autre intérieure. Il y aura donc un parallèle *maximum* et un parallèle *minimum* (fig. 2).

4. CONTOURS APPARENTS D'UNE SURFACE DE RÉVOLUTION.

(a) Contour apparent vertical.

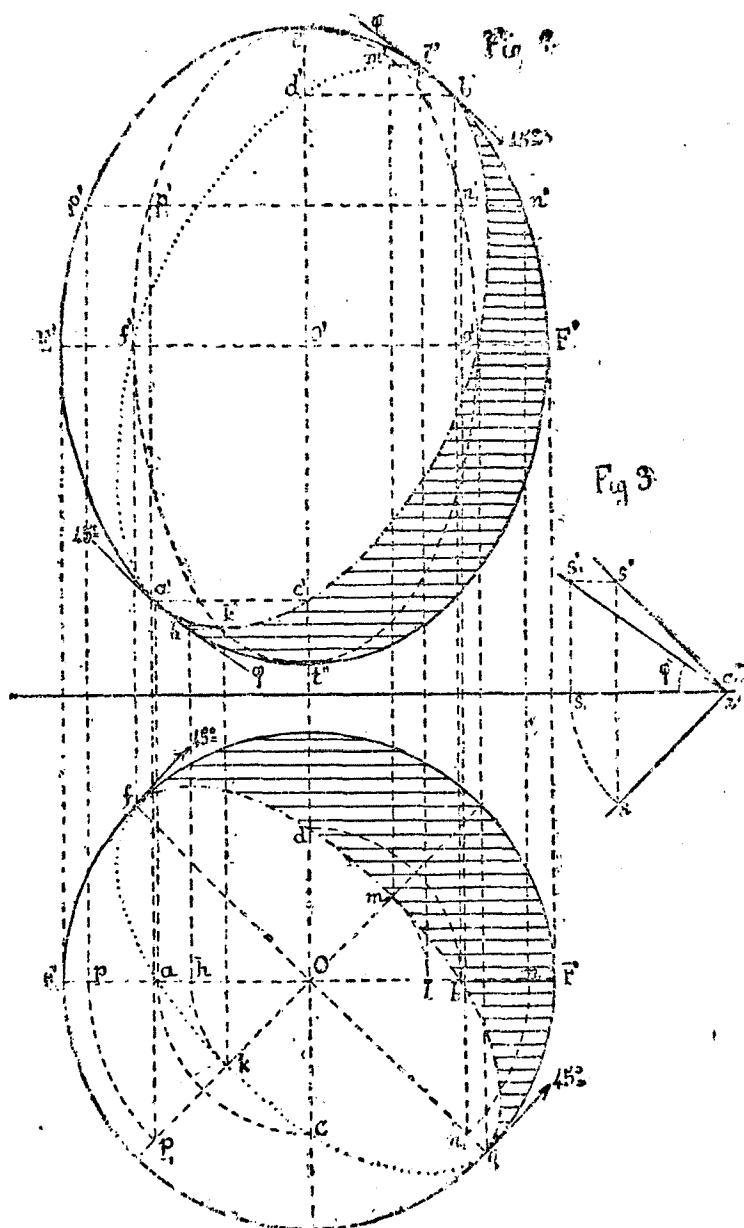
On sait que le contour apparent d'une surface est l'enveloppe des projections de toutes les courbes tracées sur cette surface.

Or, en projection verticale, quelle est l'enveloppe des parallèles ? Nous avons reconnu qu'ils étaient limités aux points où ils touchaient le méridien principal. Donc, ce dernier est leur enveloppe, par conséquent :

Le *contour apparent vertical* est la *projection du méridien principal*.

(b) *Contour apparent horizontal.*

On pourra dire : les parallèles étant tous concentriques, le plus grand ou le plus petit de tous sera leur enveloppe. Donc, le



contour apparent horizontal est la projection du parallèle *maximum* ou *minimum*. C'est l'équateur.

On peut dire encore : les méridiens sont tous projetés ho-

horizontalement suivant des droites égales en longueur. Donc, le cercle décrit par les extrémités F, g, E de ces droites sera leur enveloppe ; or, ce cercle est précisément la projection horizontale du parallèle maximum. Donc, etc...

5. OMBRE D'UN ELLIPSOÏDE DE RÉVOLUTION.

1^o Points sur le contour apparent vertical et sur le méridien de profil.

On sait que le contour apparent d'une surface n'est autre chose que la base sur un plan de projection d'un cylindre qui serait circonscrit à cette surface et perpendiculaire à ce plan de projection.

Le méridien principal étant le contour apparent vertical de la surface, un cylindre qui serait circonscrit à la surface et qui, de plus, serait perpendiculaire au plan vertical, aurait donc précisément comme base sur le plan vertical le contour apparent vertical, et comme courbe de contact le méridien principal.

Cela posé : appliquons la méthode des surfaces circonscrites ; considérons ce cylindre, dont la base en projection verticale est le méridien principal, et cherchons son ombre propre. (Voir le problème, 2^e leçon. Ombre propre d'un cylindre perpendiculaire à l'un des plans de projection.)

Il suffit de mener à sa base, en projection verticale, deux tangentes à 45°.

Ces points de tangence a' et b' seraient le pied sur le plan vertical des lignes d'ombre du cylindre.

Ce seront aussi les deux points de l'ombre de l'ellipsoïde qui seront sur le méridien principal ou sur le contour apparent vertical.

Remarque. En ces points, la courbe d'ombre sera tangente au contour apparent, puisque toute courbe tracée sur une surface est tangente en projection à son contour apparent.

Les projections horizontales a et b de ces deux points se trouveront sur la ligne EF , projection du méridien principal, et sur les lignes de rappel $bb' aa'$ qui passent par b' et a' .

6. POINTS SUR LE MÉRIDIEEN DE PROFIL.

A cause de la symétrie du méridien principal et du méridien de profil par rapport au rayon à 45°, à tout point de l'ombre

situé sur le premier, correspondra un point de l'ombre situé sur le second et placé sur le même parallèle.

Par un arc de cercle, ramenons en projection horizontale le point a en c et le point b en d .

Et, en projection verticale, par une parallèle à la ligne de terre, ramenons a' en c' et b' en d' , et nous aurons en cc' , dd' , deux nouveaux points de l'ombre : ce sont les points de l'ombre sur le méridien de profil.

7. POINTS SUR LE CONTOUR APPARENT HORIZONTAL.

Circonscrivons à la surface un cylindre perpendiculaire au plan horizontal. Sa base sera le contour apparent horizontal, c'est-à-dire le parallèle maximum.

Cherchons l'ombre de ce cylindre. Il faut mener à sa base deux tangentes à 45° .

Les points de tangence g et f sont les pieds des génératrices d'ombre de ce cylindre. Ce sont aussi les points de l'ombre qui sont sur le contour apparent horizontal.

Remarque. — En ces points, la courbe d'ombre sera tangente au contour apparent. On aura les projections verticales g' et f' de ces points en menant la ligne de rappel jusqu'à la projection $E'F'$ du parallèle maximum, c'est-à-dire sur l'équateur.

Remarque. — Les points g' et f' ainsi obtenus partagent le rayon $o'F'$, comme le fait l'ombre d'un cylindre, c'est-à-dire que le point g' tombe, à très-peu près, aux $3/10$ de ce rayon.

Si donc, on ne veut pas avoir à se servir du plan pour trouver ce point, ce qui est le cas ordinaire, on pourra utiliser cette remarque.

8. REMARQUE GÉNÉRALE SUR LES POINTS D'OMBRE SITUÉS SUR LES CONTOURS APPARENTS D'UNE SURFACE QUELCONQUE.

Le contour apparent d'une surface quelconque est toujours la courbe de contact d'un cylindre circonscrit à la surface et perpendiculaire à un plan de projection.

En appliquant la méthode précédente à un objet quelconque dont on connaît le contour apparent; nous serons amenés à tracer la tangente à 45° à la courbe de base de ce cylindre circonscrit, c'est-à-dire précisément à ce contour apparent.

Théorème général. — Donc, sur une surface quelconque, de révolution ou non, on obtient les points de l'ombre qui sont sur

les contours apparents, en menant à ces contours des tangentes parallèles aux projections des rayons lumineux. En ces points, la ligne d'ombre propre est tangente au contour apparent, et en même temps au rayon lumineux.

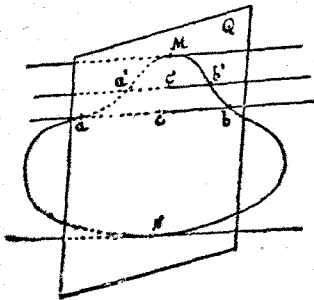
9. POINTS LE PLUS HAUT ET LE PLUS BAS.

On sait qu'au point le plus haut et le plus bas d'une courbe quelconque, la tangente est horizontale.

Quand une courbe est symétrique par rapport à un plan vertical, ce qui est le cas de la courbe d'ombre, qui est évidemment symétrique par rapport au plan de symétrie à 45° , le point M ou N de la courbe, qui est dans le plan de symétrie Q, ne peut être qu'un point haut ou un point bas.

En effet, soit a , un point de la courbe situé d'un côté du plan; à cause de la symétrie, il en existe un autre b , situé de l'autre côté, sur la droite ab , perpendiculaire au plan.

La sécante ab de la courbe est perpendiculaire au plan Q, et, comme ce dernier, est vertical; cette sécante est horizontale.



Cela fait, rapprochons de plus en plus le point a du point M.

Le point b se rapprochera de même du point M, et à la limite, la sécante ab deviendra la tangente en M; mais elle n'aura pas cessé d'être horizontale. Donc, le point M est bien le point le plus haut.

La recherche du point le plus haut ou le plus bas revient donc à trouver les points de l'ombre qui sont dans le *méridien de symétrie à 45°*

10. POINTS DE L'OMBRE DANS LE MÉRIDIEN DE SYMÉTRIE A 45° .

Cette fois, nous emploierons la méthode des plans sécants.

Le plan de symétrie à 45° est parallèle au rayon lumineux; on peut donc le prendre comme plan coupant.

Il coupe la surface suivant un méridien.

Ramenons par une rotation ce méridien à être le méridien principal, et ramenons avec lui le rayon lumineux à être, du même coup, parallèle au plan vertical.

Nous aurons (fig. 3), en S'_1a' , le rayon rendu par rotation parallèle au plan vertical, c'est-à-dire projeté à l'angle φ .

Menons dans cette position la tangente à l'angle φ , au

méridien, qui est actuellement confondu avec le méridien principal. Soient k' et l' , projetés horizontalement en h et l les deux points de tangence. Ramenons ces points en kk' et mm' , sur un méridien de symétrie, par une rotation inverse. Nous aurons en k' et m' les points le plus haut et le plus bas. En k' et h' , les tangentes en projection verticale sont parallèles à la ligne de terre; en k et m , en projection horizontale, elles sont perpendiculaires au rayon lumineux.

Remarque pratique. — Si on veut se passer de la projection horizontale pour trouver ces points, avec l'équerre à l'angle φ , décrit dans la 2^e leçon, on mènera de suite la tangente φ en h' et l' .

On tracera les parallèles correspondants et on remarquera que le point k' et m' , étant le point à 45° de ces parallèles, les longueurs kk' et lm' seront les 3/10 environ des rayons de ces parallèles, ce qui permettra de tracer très-rapidement les points en projection verticale.

Tous les points précédents ainsi obtenus, on les joindra par un trait continu, en ayant soin de tracer les courbes tangentes aux contours apparents.

II. RÉSUMÉ.

Le tracé de l'ombre se fait donc très-facilement.

(a) En projection verticale.

C'est ordinairement, dans le dessin, la plus importante à déterminer. Il faut pouvoir le faire sans se servir du plan.

1° Les tangentes à 45° donnent les points a' et b' sur le contour apparent;

2° En projetant ces points sur l'axe, en c' et d' , on a les points de l'ombre situés dans le méridien de profil;

3° En prenant les 3/10 du rayon du parallèle maximum, on a les points g' et f' sur ce parallèle;

4° Menant les tangentes φ au méridien principal; puis ramenant aux 3/10 de leur rayon les points de tangence, on a en k' et m' les points le plus haut et le plus bas.

(b) En projection horizontale.

1° Les tangentes à 45° donneront les points f et g sur le contour apparent;

2° Les lignes de rappel menées des points a' et b' sur le méridien principal, donneront les points a et b sur le méridien parallèle, en projection, à la ligne de terre ;

3° Ces points, ramenés par des arcs de cercle sur le méridien de profil, donneront les points c et d ;

4° Les lignes de rappel menées du point le plus haut et le plus bas, sur le méridien de symétrie à 45° , donneront les projections horizontales m et k de ces points.

12. OMBRE PROPRE D'UN TORE. — REPRÉSENTATION DE CETTE SURFACE.

1° En projection verticale. (Fig. 2.)

Le méridien est un cercle SS' , tournant autour d'un axe situé dans son plan, et que nous supposons vertical.

Le contour apparent vertical sera donné par les deux cercles du méridien principal, mais reliés entre eux par deux tangentes horizontales.

Nous donnons en A la projection verticale du tore, supposé complet et vu en se plaçant en avant.

Alors, une portion des deux cercles méridiens est cachée. Le contour apparent se compose de deux demi-cercles réunis par leurs tangentes communes, horizontales.

Nous donnons en B la coupe faite suivant le plan méridien principal. Nous voyons, en coupe, les deux cercles méridiens, et, en projection, la moitié seulement du tore ; la partie qui est en arrière.

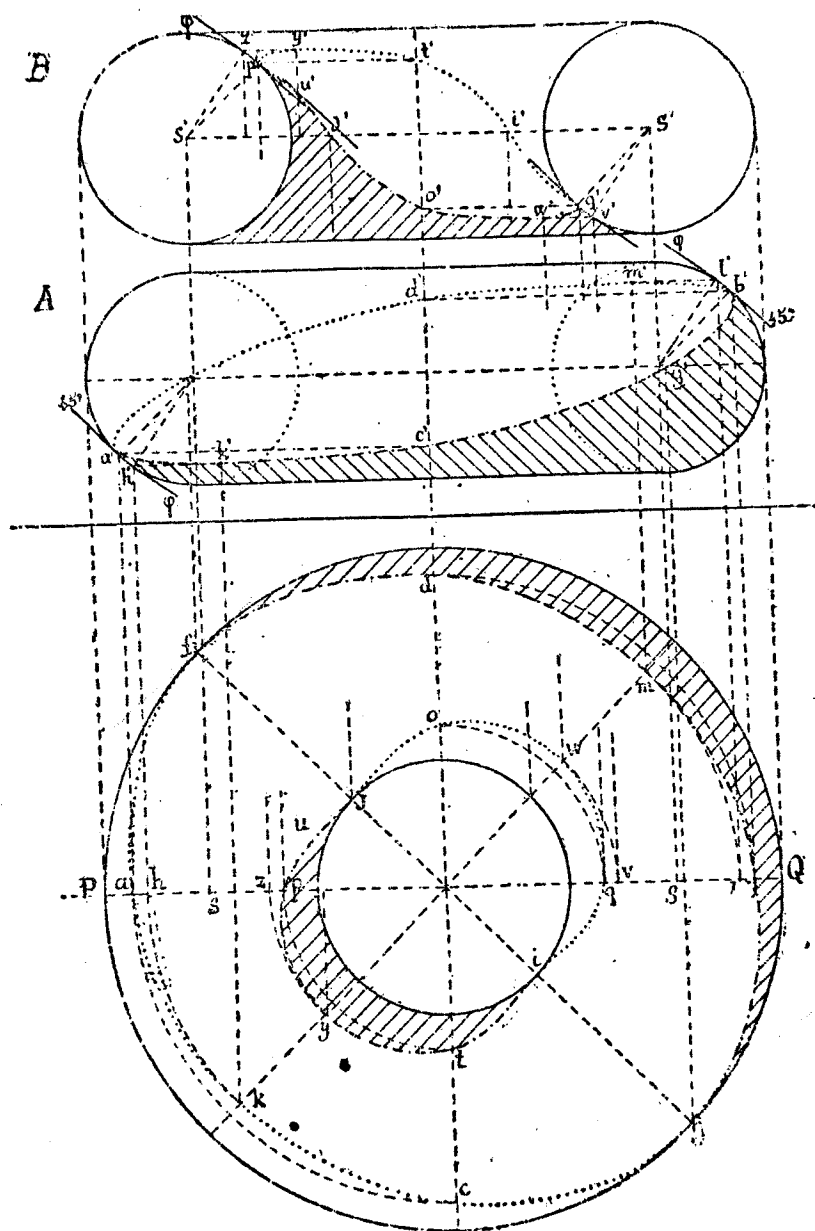
2° En projection horizontale.

En projection horizontale, nous aurons deux contours apparents : l'un donné par le parallèle *maximum* $fg, f'g'$, obtenu par la rotation du point du cercle générateur le plus éloigné de l'axe, l'autre, donné par le parallèle *minimum* $ij, i'j'$. L'ombre se composera de deux parties :

1° L'ombre extérieure, dont nous donnerons la projection verticale sur la figure A ;

2° L'ombre intérieure, dont nous donnerons la projection verticale sur la figure B. Nous ne pourrions même voir que la moitié de cette courbe ; celle qui est en arrière du plan coupe. Nous donnerons l'autre moitié, cependant, en ligne rectue.

Fig. 2.



13. OMBRE EXTÉRIEURE (Plan et élévation A).

1^o Points sur le contour apparent vertical.

On mène les tangentes à 45° à ce contour. On a ainsi 1 points a' et b' , projetés horizontalement en a et b . En a' et b' la tangente est tangente au contour apparent vertical.

2° Points sur le méridien de profil.

On ramène les points aa' et bb' sur l'axe, en projection verticale par les parallèles à la ligne de terre, et en projection horizontale par des arcs de cercle, sur le méridien de profil. On obtient ainsi les points cc' et dd' .

3° Points sur le grand contour apparent horizontal.

On mène les tangentes à 45° à ce contour. On obtient les points de tangence f et g , dont les projections verticales sont f' et g' sur le parallèle maximum.

4° Points le plus haut et le plus bas.

En projection verticale, on mène au méridien principal les tangentes à l'angle φ . On obtient les points h' et l' , projetés horizontalement en h et en l . On ramène par une rotation inverse de 45° ces points sur le méridien de symétrie en k et en m , par des arcs de cercle en projection horizontale, et en k' et m' par des parallèles à la ligne de terre en projection verticale. En k' et m' , en projection verticale, la tangente est horizontale; en k et m , en projection horizontale, la tangente est perpendiculaire au rayon lumineux.

Remarque. Les points k' et m' tombent en projection verticale aux $3/10$ des rayons correspondants; il en est de même des points f' et g' , situés sur le parallèle maximum.

On joindra les points ainsi obtenus par une ligne continue, en la faisant bien se raccorder avec les tangentes ou avec les courbes de contour apparent que nous avons signalées.

Remarque. Cette courbe n'est pas une ellipse, ni en projection horizontale, ni en projection verticale.

14. OMBRE INTÉRIEURE (fig. 2, élévation B.)*1° Points sur le contour apparent vertical.*

On mène les tangentes à 45° à ce contour. On obtient les points p' et q' projetés horizontalement en p et q .

En ces points, la courbe, en projection verticale, est tangente au contour apparent.

2° Points sur le méridien de profil.

On projette les points p' et q' sur l'axe, en projection verticale. On les ramène de profil, en projection horizontale, par des arcs de cercle. On obtient ainsi les points tt' , oo' . Le point tt' est en avant du plan de coupe ; il est donc supposé enlevé et n'est pas vu. L'autre est en arrière et est vu.

3° Points sur le contour apparent horizontal.

On mènera les tangentes à 45° à ce contour, qui est ici le parallèle minimum. Les points de tangence i et j , ramenés en i' et j' , en projection verticale, donnent les points demandés.

Remarque. Ces points sont ce que nous avons appelé (2^e leçon) des points virtuels, c'est-à-dire que le rayon lumineux qui les donnerait ne les atteindrait qu'après avoir percé la surface. Ils ne constituent donc pas, à proprement parler, des points de l'ombre. Cependant, nous les garderons pour qu'ils nous aident à tracer la ligne continue qui constituera la courbe d'ombre. Nous verrons ensuite à partir de quel point cette courbe devient virtuelle.

4° Points le plus haut et le plus bas.

En projection verticale, Fig B. menons les tangentes à l'angle ϕ .

Ramenons les points de tangence zz' , vv' sur le plan méridien de symétrie en yy' , et ww' . Nous aurons ces points.

Tous les points étant ainsi obtenus, joignons-les sur les deux projections par des lignes continues. Nous aurons les courbes de l'ombre intérieure.

La forme en est plus irrégulière que celle de l'ombre extérieure ; elle présente plusieurs inflexions, c'est-à-dire, plusieurs endroits où sa concavité change de sens.

15. POINTS DE PASSAGE DE L'OMBRE INTÉRIEURE, ET COURBE D'OMBRE AUTOPORTÉE.

Nous avons fait remarquer (3^e leçon) que dans un tore et en général dans toute surface à double courbure, il y avait ombre portée par la surface sur elle-même. Nous l'avons appelée *l'ombre autoportée*, et les points de passage sont ceux où l'ombre propre se raccorde avec l'ombre autoportée.

On a vu que, aux points de passage, la tangente aux courbes

L'ombre propre et autoportée est la même et est le rayon lumineux.

Traçons la courbe d'ombre propre à l'aide des points trouvés ci-dessus, et en nous laissant guider par le sentiment de la continuité.

Menons à cette courbe les tangentes à 45° qu'il sera possible de lui mener, en plus de celles qui existent déjà.

Soit u' un de ces points de tangence en projection verticale et u en projection horizontale ; le point u, u' est un point de passage.

Au point u, u' commencera la courbe d'ombre autoportée. Nous ne la figurons pas sur cette épure ; son tracé exact sera indiqué dans une leçon suivante.

16. TRAVAIL DES ÉLÈVES POUR LA PROCHAINE LEÇON.

Les élèves feront complètement, au crayon et à l'encre, pour la prochaine leçon, la planche n° 3, qui vient d'être expliquée dans cette leçon.

Les courbes seront tracées avec grand soin et ne devront être faites à l'encre qu'après s'être assuré qu'elles ne présentent pas de jarrets, c'est-à-dire de sinuosités autres que celles qui doivent en réalité exister.

Ces courbes se passent à l'encre avec de petites plumes. Les élèves feront bien d'acheter, pour cela, des plumes dites à *autographie*, qui s'ajustent sur des porte-plumes ordinaires, et qui sont très-fines et très-flexibles.

4^e LEÇON.

THÉORIE DU LAVIS. — LIGNES DE TEINTES SUR LA SPHÈRE.

1. Nous abandonnerons pour quelques leçons la théorie géométrique des ombres pour étudier celle du lavis. Cette dernière nous enseignera la manière de disposer les teintes d'ombre et de couleur, pour que les dessins lavés produisent sur nos yeux l'effet de relief des objets eux-mêmes. Cette théorie de lavis une fois bien comprise, nous pourrons laver les épreuves d'ombre qui nous restent à faire; ce qui les rendra plus saisissantes et plus intéressantes.

2. PRINCIPES GÉNÉRAUX DE LA THÉORIE DU LAVIS.

Nous rappellerons ce qui a été dit en seconde année sur les principes du lavis.

Ils sont au nombre de trois :

1^o Le principe des orientations;

2^o Celui des couleurs;

3^o Celui des distances.

Comme il importe que nous soyons le plus promptement possible mis à même de faire le lavis des corps que nous aurons à représenter, nous allons, dans cette leçon, donner, sans le justifier, le tracé des courbes suivant lesquelles les teintes doivent être séparées sur une sphère; on nomme ces lignes les courbes d'égale teinte. Dans les leçons suivantes, nous démontrerons la justesse de nos tracés.

3. PRINCIPE DES ORIENTATIONS. CORPS POLIS ET DÉPOLIS.

L'éclairement d'un objet ou d'une partie d'objet dépend de l'angle sous lequel la lumière lui arrive.

On appelle angle d'incidence du rayon lumineux l'angle que ce rayon fait avec la normale (1) à la surface de l'objet, au point où il vient la frapper.

Eu égard à la manière dont ils reçoivent et dont ils renvoient la lumière,

Les corps se divisent en trois classes :

Les corps dépolis ou mats.

Les corps polis.

Les corps mi-polis.

Les premiers reçoivent la lumière et la renvoient en la diffusant, c'est-à-dire dans toutes les directions, comme s'ils devenaient, à leur tour, sources de lumière.

Les seconds ne les renvoient que dans une direction. Ils forment miroir.

La lumière, au lieu de se *diffuser* à leur surface, s'y réfléchit, en faisant, après réflexion, un angle de réflexion égal à l'angle d'incidence.

La loi de la réflexion sur les corps polis est la suivante :

1° Le rayon incident est avec le rayon réfléchi dans un même plan contenant la normale ;

2° Ils font tous deux le même angle avec cette normale.

Sur un corps poli, la source de lumière donne son image, qui apparaît au spectateur comme un point très-brillant à la surface du corps.

Lorsque l'on doit faire le lavis d'un corps poli, il faut chercher le point brillant en ayant égard à la loi donnée ci-dessus.

Enfin, les corps mi-polis sont ceux qui tiennent le milieu entre les deux espèces de corps que l'on vient d'indiquer. Ils ont un point brillant qui est le même que s'ils étaient parfaitement polis, et des courbes de teintes, peu différentes de celles qu'ils auraient, s'ils étaient dépolis.

4. ÉTUDE DE LA SPHÈRE.

Nous allons donner le tracé des courbes de teintes pour une

* 1. On sait que la normale en un point est la perpendiculaire au plan tangent en ce point.

sphère supposée dépolie et pour une autre supposée mi-polie. Les corps tout à fait polis sont très-rares dans la nature ; il faut être peintre pour en rendre parfaitement l'effet. Nous ne nous en occuperons pas.

La sphère est le plus simple et le plus régulier des corps ronds. On peut lui en circonscrire beaucoup d'autres, comme nous avons déjà vu, qui se confondent avec elle tout le long de la courbe de contact. Par conséquent, les lignes de teintes de ces corps se confondront, sur cette courbe de contact, avec les lignes de teintes de la sphère.

Traçons donc, dans cette leçon, les lignes de teintes sur la sphère ; nous montrerons, dans une leçon suivante, l'usage qu'on en doit faire pour le lavis des cônes, des cylindres et des corps ronds, en général.

5. LIGNES DES TEINTES SUR LA SPHÈRE DÉPOLIE.

Nous démontrerons plus tard que les lignes d'égale teinte sur un corps dépoli sont les lignes d'égale incidence, ce qui nous conduira au tracé suivant :

Soit oo' une sphère (fig. 1). Le rayon est à 45° .

Il suffira évidemment de donner les courbes pour une seule des deux projections, puisque l'aspect d'une sphère est le même (le rayon étant à 45°), qu'on la regarde en projection verticale ou horizontale.

Nous donnerons le tracé en projection horizontale seulement.

Pour faire plus facilement les constructions, nous allons d'abord rendre par la *rotation* connue, le rayon lumineux parallèle au plan vertical (fig. 3), il se projette alors à l'angle φ sur le plan vertical.

6. POINT CLAIR.

Menons le rayon lumineux $N'O'$ qui passerait par le centre. Il serait normal en N' à la sphère. N' se projettera horizontalement en N , le point N sera le point d'incidence normale, par suite, de plus grande incidence ; ce sera, par conséquent, le point *clair* (je ne dis pas *brillant*) de la sphère dépolie.

7. OMBRE PROPRE.

L'ombre propre sera déterminée par le plan $M'T'$ passant par le centre et perpendiculaire au rayon lumineux. Ce plan

détermine un grand cercle, qui se projettera horizontalement suivant une ellipse, dont OT sera le demi-petit axe, et K₁K le grand axe.

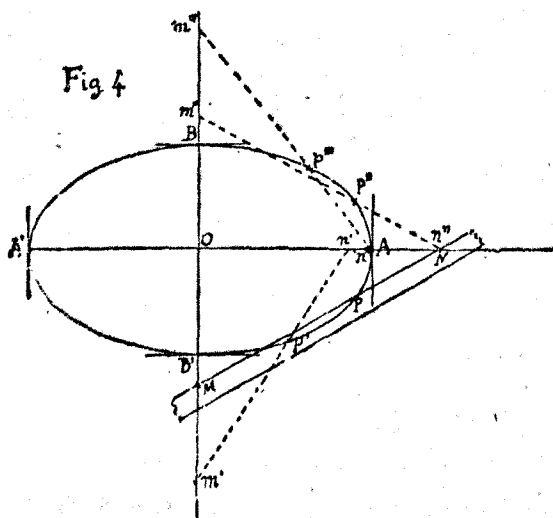
On tracera cette ellipse avec le plus grand soin.

8. TRACÉ DES ELLIPSES A LA BANDE DE PAPIER PAR LA SOMME DES AXES.

Les élèves traceront cette ellipse de même que toutes celles dont il sera question plus loin, de la manière suivante :

Ils prendront une feuille à part, de préférence ce sera du papier calque fort. S'ils ont 10 ou 15 ellipses à tracer, ils prépareront, les uns à côté des autres, les axes, qu'ils relèveront sur l'épure comme nous l'indiquerons. Ils traceront toutes leurs ellipses (au crayon un peu noir) sur cette feuille de papier calque, et les corrigeront jusqu'à ce qu'elles soient parfaites. Les ellipses étant faites à part, il est plus facile de juger de leurs défauts que si elles étaient enchevêtrées comme elles le sont sur l'épure. Une fois certains de leurs ellipses, ils les reporteront sur l'épure, en mettant le papier calque à l'envers et repassant avec une pointe de crayon dur, sur l'autre côté. Le trait se reportera sur l'épure définitive, et ils n'auront plus qu'à la passer à l'encre. Deux procédés peuvent être employés pour faire les ellipses.

Premier procédé. — Tracé à la bande de papier par la somme



des axes. Soient AA' BB, les deux axes (fig. 4.), on les pro-

longe. On prend une bande de papier MN coupée très-droit. On porte sur cette bande deux longueurs, $MP = OA$ (demi-grand axe), et $PN = OB$ (demi-petit axe).

On place cette bande de papier dans toutes les positions possibles, en ayant soin que les deux points M et N soient sur les axes ou sur leurs prolongements. Chaque fois, avec un crayon très-fin et tenu très-droit et très-près de la bande de papier, on marque la position du point P.

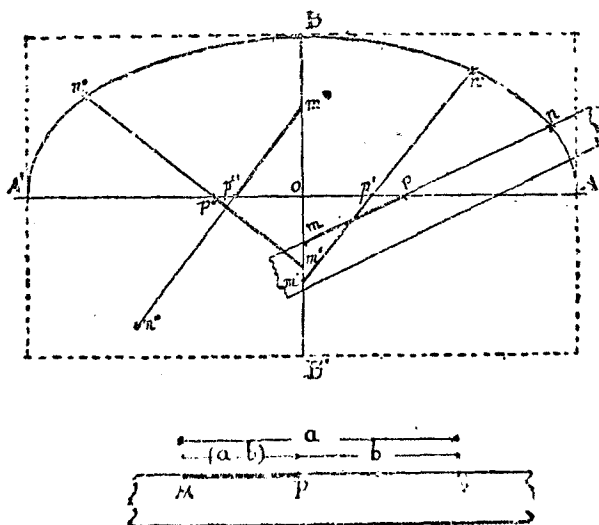
Les points ainsi obtenus P, P' P'' P''' sont des points de l'ellipse, qu'il ne reste plus qu'à joindre par un trait continu.

Remarque. — On devra toujours mener aux extrémités des axes A, A', B, B', les tangentes en ces points. Ce sont les perpendiculaires à ces axes. On fera même bien de construire d'abord le rectangle sur les axes.

9. AUTRE TRACÉ DES ELLIPSES A LA BANDE DE PAPIER. (Par la différence des axes.) (Fig. 4 bis).

On prendra $MN = a$ (le demi-grand axe) ; dans l'intérieur de MN et non pas sur son prolongement, comme tout à l'heure, on portera $NP = b$ (le demi-petit axe).

Tandis que, tout à l'heure, nous faisons glisser sur les deux axes la somme des deux demi-axes, cette fois nous ferons (Fig. 4 bis.)



glisser les deux points M et P, c'est-à-dire la différence des deux axes. Le point N, dans ces diverses positions, décrira l'ellipse

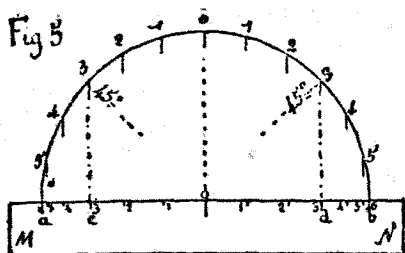
La figure ci-contre fait assez comprendre ce tracé.

Il peut être moins exact que l'autre, mais il est plus commode; parce que les points M et P que l'on fait glisser, étant moins éloignés, nécessitent moins de longueur d'axes. On n'a pas à se servir du prolongement de ces derniers.

10. TRACÉ DES ELLIPSES PAR ÉCHELLES. (Connaissant les deux axes, ou deux diamètres conjugués.)

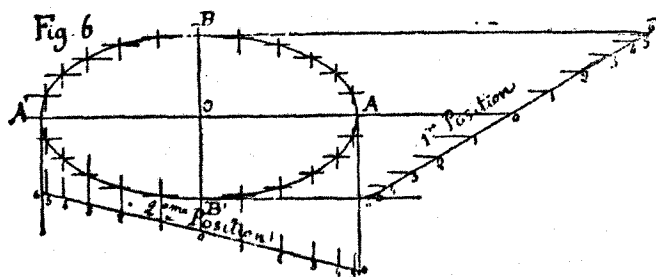
On commencera par tracer sur une feuille de papier mince, quoique solide, une demi-circonférence, que l'on divisera en un certain nombre de parties égales, en douze, par exemple; de cette façon on aura des points sur les rayons à 45° . (Fig. 5.)

On projettera les points de division sur le diamètre, et l'on aura ainsi une échelle MN, que l'on pourra découper suivant le diamètre ab , pour la garder dans la boîte de compas.



Cela posé, soit AA' , BB' (fig. 6) les deux axes d'une ellipse à construire. Nous construisons le rectangle sur ces axes, et nous en prolongeons les côtés.

Nous inscrivons une première fois notre échelle entre deux de ces côtés prolongés (1^{re} position); par les points de division de l'échelle, nous menons des parallèles à ces côtés, en ayant soin

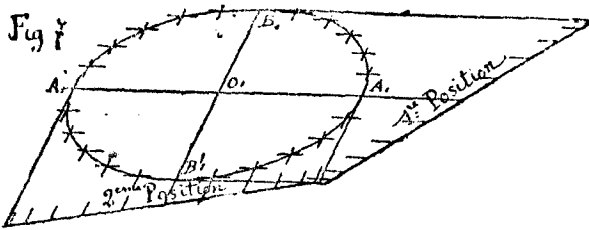


pour ne pas surcharger le dessin, de ne tracer ces parallèles qu'aux environs de l'ellipse, dont on aura bien fait d'esquisser la courbe à l'avance et au crayon, très-légèrement.

Nous inscrivons de même notre échelle entre les deux autres côtés, nous menons des parallèles par les points de division, et les traits ainsi faits, recouperont les premiers en des points de l'ellipse. Nous joignons ensuite ces points par un trait continu.

Si l'ellipse est définie par deux de ses diamètres conjugués

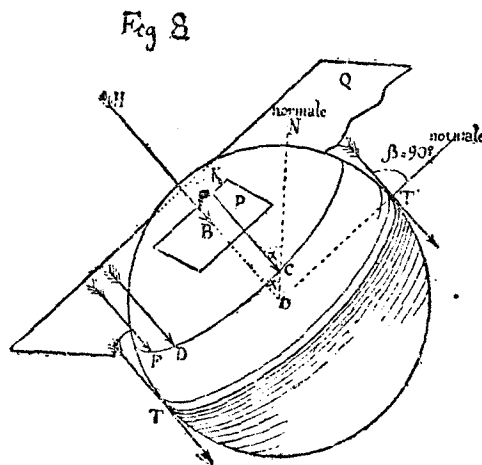
O_1A_1 , O_1B_1 (fig. 7), on formera le *parallélogramme* sur ces deux diamètres, (et non pas le rectangle), et la construction se fera



de la même manière. La figure ci-jointe la fait suffisamment comprendre.

11. LIGNES D'ÉGALE INCIDENCE SUR LA SPHÈRE.

Si nous coupons la sphère par une série de plans perpendiculaires au rayon lumineux, comme le plan Q (fig. 8) ; il est facile de se rendre compte que les rayons lumineux qui frapperont en F, D, C le cercle ainsi obtenu, feront tous, le même angle avec le rayon de la sphère, c'est-à-dire avec la normale. Le cercle ainsi obtenu sera donc une courbe d'égal incidence, c'est-à-dire, si la sphère est dépolie, une courbe d'égal teinte.



Nous couperons ainsi la sphère, par des plans parallèles d'autant plus nombreux que nous voudrions rendre avec plus de perfection le modèle de sa surface.

Nous conviendrons dans tous nos lavis de diviser en 8 zones les surfaces, depuis la zone contiguë à l'ombre propre jusqu'au point clair ou d'incidence normale. Nous désignerons par le

numéro 0 la ligne d'ombre propre, par les numéros 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 les lignes de séparation des zones dans la lumière, et par $\bar{1}$ (lire moins 1), $\bar{2}$, $\bar{3}$, $\bar{4}$, $\bar{5}$, $\bar{6}$, $\bar{7}$ les lignes de teinte dans la partie de l'ombre.

Le point normal porterait le n° 8.

Rien n'indique de choisir d'une manière ou d'une autre la distance entre les plans parallèles qui détermineront les courbes. Nous les prendrons pour la sphère dépolie, équidistants, c'est-à-dire que nous diviserons le rayon normal en huit parties égales et que nous mènerons nos plans par ces points de division.

Nous obtiendrons ainsi en projection verticale les droites ($1', 1'$) ($2', 2'$) ($3', 3'...$) nous représentant des petits cercles de la sphère ; les projections horizontales de ces cercles seront des ellipses. Nous allons indiquer, pour une d'elles, la manière d'en avoir les axes.

12. CONSTRUCTION D'UNE DES ELLIPSES EN PROJECTION HORIZONTALE (fig. 1).

Prenons un quelconque des cercles de teintes, le cercle de teinte 4'4', par exemple, c'est un cercle perpendiculaire au plan vertical. Son rayon en vraie grandeur est $c'a'$.

Les deux points a' et b' projetés horizontalement en a et b sur le diamètre parallèle à la ligne de terre, donneront le petit axe de la projection, f sera le centre.

Le grand axe sera la droite fc , fd , perpendiculaire à fa , et que nous prendrons égal au rayon du cercle, c'est-à-dire à $c'a'$.

Ayant ainsi les dimensions des axes, nous construirons notre ellipse sur une feuille de papier auxiliaire à l'aide de l'un des trois procédés indiqués, et, quand nous serons certains de son exactitude, nous la reporterons sur l'épure en la décalquant, et en ayant bien soin de mettre son centre en f et son petit axe en fa .

13. POINTS DES ELLIPSES SUR LE CONTOUR APPARENT.

Si on prend le point g' , où le cercle en projection verticale coupe le grand cercle horizontal $h't'$ de la sphère, comme ce grand cercle est précisément le contour apparent horizontal de la sphère, le point g' aura ses projections horizontales en g et g_1 sur le contour apparent, et la ligne de rappel menée par g' donnera le point g .

L'ellipse doit passer par g et g_1 et de plus, être tangente en ces points au cercle de contour apparent horizontal. On conçoit facilement l'importance de ces points où les ellipses viennent se perdre dans le contour apparent.

Les autres ellipses se construiront de la même manière.

14. SPHÈRE REMISE DANS LA POSITION ORDINAIRE.

Une fois les courbes tracées, il faudrait prendre la sphère et la faire tourner de 45° avec le rayon lumineux, pour la remettre en place. Il sera préférable, sans refaire la figure, de changer simplement l'épure de place.

Traçons deux nouvelles lignes de terre x_1y_1 et x_2y_2 , inclinées à 45° sur la ligne de terre xy .

En tournant le papier de manière que la droite x_1y_1 soit horizontale et regardant la sphère, on la verra dans la position d'une sphère en projection verticale, avec rayon à 45° .

En plaçant au contraire x_2y_2 horizontal, la sphère apparaîtra dans la position d'une sphère en projection horizontale.

15. SPHÈRE MI-POLIE.

Rayons visuels.

Soit (fig. 2) une sphère mi-polie O , O' . Le rayon lumineux est rendu comme tout à l'heure, parallèle au plan vertical, par une rotation.

Soit encore $O'N'$ le rayon lumineux *normal*.

Le point N' est le point d'incidence normale, mais non plus le point brillant.

En effet, le corps étant presque poli, les rayons se réfléchissent à sa surface. Le rayon N' est renvoyé dans sa direction primitive, tandis qu'au point brillant, le rayon doit, après réflexion, passer par l'œil du spectateur, en obéissant à la loi de la réflexion. Or, on sait que, quand on regarde une projection horizontale, on est supposé situé à l'infini au-dessus du plan horizontal ; les rayons visuels (fig. 2 bis) sont donc verticaux. Trouver le point brillant revient donc à chercher le point de la sphère pour lequel le rayon sera réfléchi suivant une verticale.

16. POINT BRILLANT.

Menons par le centre O un rayon visuel $O'V'$.

Menons la bissectrice $O'S'$ de l'angle formé par ce rayon visuel, et le rayon normal $O'N'$. Le point S' de rencontre de cette bissectrice et de la sphère sera le point brillant.

En effet, un rayon lumineux $Q'S'$ qui frappera la sphère en ce point sera réfléchi en faisant avec la normale $O'S'$ un angle $U'S'Z$ de réflexion égal à l'angle d'incidence $U'S'Q'$.

Mais l'angle d'incidence $Q'S'U'$ est égal à l'angle au centre $N'O'S$ comme correspondant.

L'angle au centre $S'O'V'$ est égal à l'angle $N'O'S'$ puisque $S'O'$ est bissectrice, par conséquent, l'angle $U'S'Z'$ est égal à l'angle $S'O'V'$ et $S'Z'$ est parallèle à $O'V'$, c'est-à-dire est vertical.

Le rayon incident au point S' est donc transformé par la réflexion en un rayon visuel. Donc le point S' est le point brillant.

La projection horizontale du point S' se fera en S sur le diamètre parallèle à la ligne de terre.

Remarque. — S n'est le point brillant que pour la projection horizontale, c'est-à-dire pour un observateur placé à l'infini au-dessus du plan horizontal.

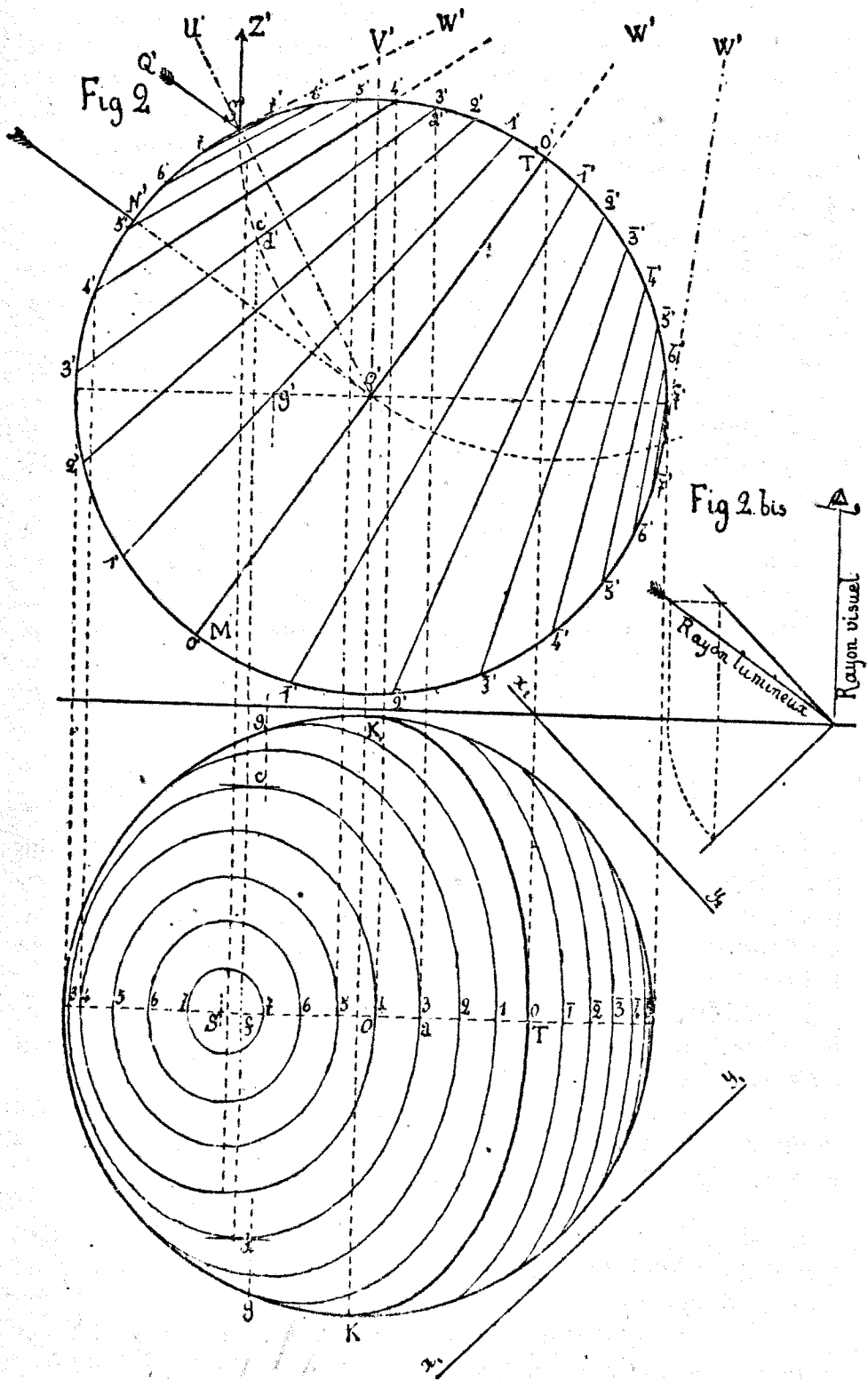
S' est la projection verticale de ce point, mais n'est nullement le point brillant de la sphère en projection verticale, c'est-à-dire pour un observateur qui serait placé à l'infini en avant du plan vertical.

17. LIGNE D'OMBRE PROPRE.

La ligne d'ombre propre s'obtiendra comme précédemment, en menant par le centre le plan perpendiculaire au rayon lumineux. Nous obtiendrons le grand cercle projeté verticalement suivant la droite MT' et horizontalement suivant l'ellipse KTK_1 .

18. LIGNES D'ÉGALE TEINTE.

Leur tracé est difficile à faire rigoureusement ; les données théoriques font défaut pour cela. Nous remarquerons cependant qu'il nous faudra trouver une série de courbes intermédiaires entre la courbe d'ombre propre et le point brillant. Nous avons adopté la construction empirique suivante.



Au point brillant S' , menons la tangente $S'W'$ et prenons son intersection W' avec la ligne $N'T'$ d'ombre propre. Ce point tombe ici en dehors des limites de l'épure. Dans le dessin au net, il sera en dehors du cadre, mais non pas en dehors de la feuille. Les élèves le chercheront et s'en serviront pour le tracé au crayon ; seulement, ils ne passeront pas à l'encre les lignes qui sortiraient du cadre.

Nous appellerons W' le point de divergence, et nous conviendrons de prendre pour ligne d'égale teinte les sections faites dans la sphère par des plans perpendiculaires au plan vertical et passant par ce point.

On voit que le premier de ces plans, $S'W'$, sera le plan tangent, et donnera le point brillant, et que le plan du milieu $M'T'W'$ donnera l'ombre propre, et l'on peut admettre avec assez de raison que les autres donneront des lignes se rapprochant beaucoup des véritables courbes d'égale teinte.

Nous diviserons aussi la sphère en huit zones pour la partie brillante et huit pour la partie dans l'ombre. Nous aurons donc à mener, en outre du plan d'ombre propre, sept plans sécants.

Nous diviserons l'arc $T'S'$ en huit parties égales aux points $0, 1', 2', 3', 4', 5', 6', 7'$, et $\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \dots \bar{7} \dots$.

Et par ces points de division et le point de divergence W' , nous mènerons nos plans.

19. TRACÉ D'UNE DES ELLIPSES EN PROJECTION HORIZONTALE.

Traçons, par exemple, l'ellipse de teinte $3'3'$. De même que précédemment, le point a' projeté en a , donnera l'extrémité du petit axe. Le point milieu $c'd'$ de la droite $a b'$ donnera, projeté en f sur le diamètre parallèle à la ligne de terre, le centre de l'ellipse.

Le demi-grand axe fc ou fd sera égal au rayon du petit cercle, lequel est projeté en vraie grandeur sur le plan vertical en $c'a'$.

Ayant les axes de cette ellipse, on la construira soigneusement sur la feuille de papier dont nous avons parlé, et quand elle sera parfaitement tracée, on la décalquera sur l'épure.

Remarque 1. Le point c' , centre du cercle ainsi déterminé, sera, ainsi que tous les autres, sur le cercle décrit sur $O'W'$ comme diamètre.

Nous avons figuré en pointillé la partie utile de ce cercle.

Remarque 2. L'ellipse que nous venons d'étudier est vue tout

entière. Il y en a d'autres qui disparaîtront après avoir rencontré le contour apparent.

20. POINTS SUR LE CONTOUR APPARENT.

Prenons, par exemple, la courbe $1'1'$.

Considérons le point g' où elle coupe en projection verticale le grand cercle d'équateur de la sphère. La ligne de rappel $g'g$ donnera en g sur le contour apparent horizontal le point où l'ellipse $1,1$, vient se perdre dans ce contour.

Il en sera de même pour tous les autres. Il est très-important de savoir déterminer ces points où les ellipses se perdent dans le contour apparent.

21. TRACÉ DES AUTRES ELLIPSES (1).

On les tracera comme nous venons de faire pour celle-ci. On déterminera leurs axes : les points où elles se perdent dans le contour apparent, s'il y a lieu. On les dessinera soigneusement sur la feuille auxiliaire, et on les décalquera ensuite à la place voulue.

Si nous prenons deux nouvelles lignes de terre x_1y_1 — x_2y_2 à 45° , à l'une correspondra la sphère vue en projection horizontale, à l'autre la sphère en projection verticale.

22. DIMENSIONS.

Les sphères auront 120^{mm} de diamètre.

23. TRAVAIL DES ÉLÈVES POUR LA PROCHAINE LEÇON.

Les élèves feront ce tracé au crayon et à l'encre pour la prochaine leçon.

Ils n'indiqueront la construction des axes que pour deux ellipses sur chaque sphère : une ellipse dans la lumière et une dans l'ombre.

Ils joindront à leur dessin au net la feuille auxiliaire sur laquelle ils auront tracé les seize ellipses qui leur sont nécessaires.

1. Cette construction a été imaginée par M. Boulard, chef du bureau des dessins à l'Ecole des Ponts et Chaussées.

5^e LEÇON.

THÉORIE DU LAVIS.

Échelles de teintes.

1. CONSTRUCTION ET USAGE DES ÉCHELLES DE TEINTES.

Dans la dernière leçon nous avons montré comment se traçaient sur une sphère, les lignes d'égales teintes ; dans le cas où cette sphère était dépolie ou mi-polie.

Nous allons indiquer dans celle-ci :

1^o L'usage de ces courbes pour tracer les lignes de teintes sur des cylindres ou des cônes circonscrits à la sphère ;

2^o La construction d'échelles nous permettant de réduire proportionnellement les divisions obtenues ;

3^o L'usage de ces échelles pour tracer les lignes de teintes sur tout autre cône, cylindre, sphère, ou plus généralement sur toute surface de révolution.

2. GÉNÉRALISATION DU PRINCIPE DES SURFACES CIRCONSCRITES.

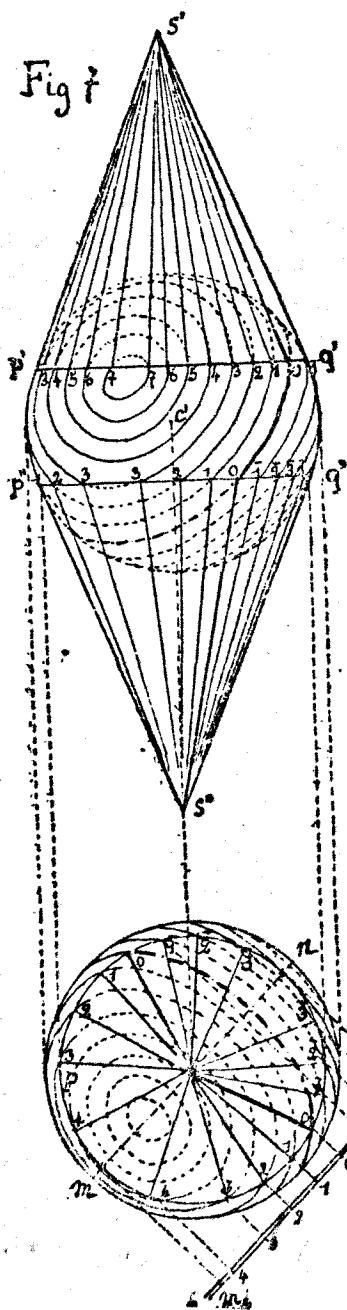
Nous avons démontré comment, lorsque deux surfaces sont circonscrites l'une à l'autre, le point où l'ombre de la première rencontrait la courbe de contact était aussi un point de l'ombre propre de la seconde. Généralisons ce principe.

Lorsque deux surfaces sont circonscrites, elles ont mêmes plans tangents en tous les points de leur courbe de contact, ce qui veut dire qu'elles se confondent sur tous les petits éléments-plans qui sont sur cette courbe.

Donc, les rayons lumineux qui frappent la première surface en un point de cette courbe frappent absolument la seconde de la même manière et par suite l'éclairent de même. Par conséquent, nous pouvons dire :

Lorsque deux surfaces sont circonscrites le point où une ligne de teinte de la première coupe la courbe de contact est aussi un point de la ligne d'égale teinte correspondante de la seconde.

3. APPLICATION A LA RECHERCHE DES LIGNES D'OMBRE ET DE TEINTE D'UN CONE OU D'UN CYLINDRE (fig. 7).



Prenons la sphère C' , en élévation et en plan. Circonscrivons-lui deux cônes S' et S'' suivant les parallèles $p'q'$ et $p''q''$.

Projetons ces parallèles en p sur le plan horizontal. Ils s'y projettent en vraie grandeur.

Supposons tracées dans leur vraie position les courbes de teinte de la sphère. Prenons en 0, 1, 2, 3, 4 et $\bar{1}$, $\bar{2}$, $\bar{3}$, les points où les courbes de teinte de la sphère rencontrent, aussi bien en projection verticale qu'horizontale, la ligne de contact $p'q'$, $p''q''$ et p . Ces points appartiendront aux lignes d'égales teintes 0, 1, 2, 3, des cônes ; il ne restera plus qu'à les joindre au sommet, pour avoir :

1° La ligne d'ombre propre (c'est celle qui correspond à la teinte n° 0) ;

2° Les lignes de teintes n° 1, n° 2, etc.

Pour tout autre cône ou cylindre dans une autre position et susceptible d'être circonscrit à la sphère-type étudiée à la leçon précédente, il suffira de savoir tracer la courbe de contact pour connaître ensuite les lignes d'ombre et de teintes.

Ces positions peuvent varier à l'infini. Nous n'étudierons que les

plus ordinaires, en nous réservant pour tout cas particulier qui se présenterait de résoudre le problème directement sur la sphère type.

4. CYLINDRES.

Cylindre parallèle aux arêtes du cube, c'est-à-dire :

Perpendiculaire au plan horizontal ;

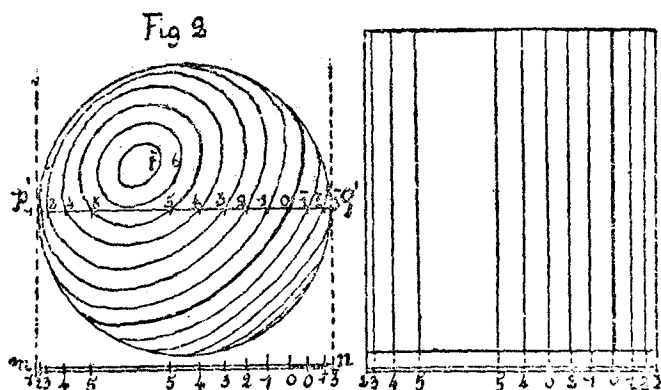
Perpendiculaire au plan vertical ;

Parallèle à la ligne de terre.

(Echelle n° 1.) (Voir les échelles à la fin du volume.)

Ce que nous dirons s'applique aussi bien aux corps dépolis qu'aux corps mi-polis ; seulement, il faut se servir dans chaque cas de la sphère correspondante. Nous donnons à la fin du volume deux séries de quinze échelles chacune s'appliquant, l'une aux corps dépolis, l'autre aux corps mi-polis, et construites pour des cylindres ou des cônes dans les positions indiquées par le croquis qui accompagne chacune de ces échelles.

Soit (fig. 2) un cylindre perpendiculaire au plan horizontal.



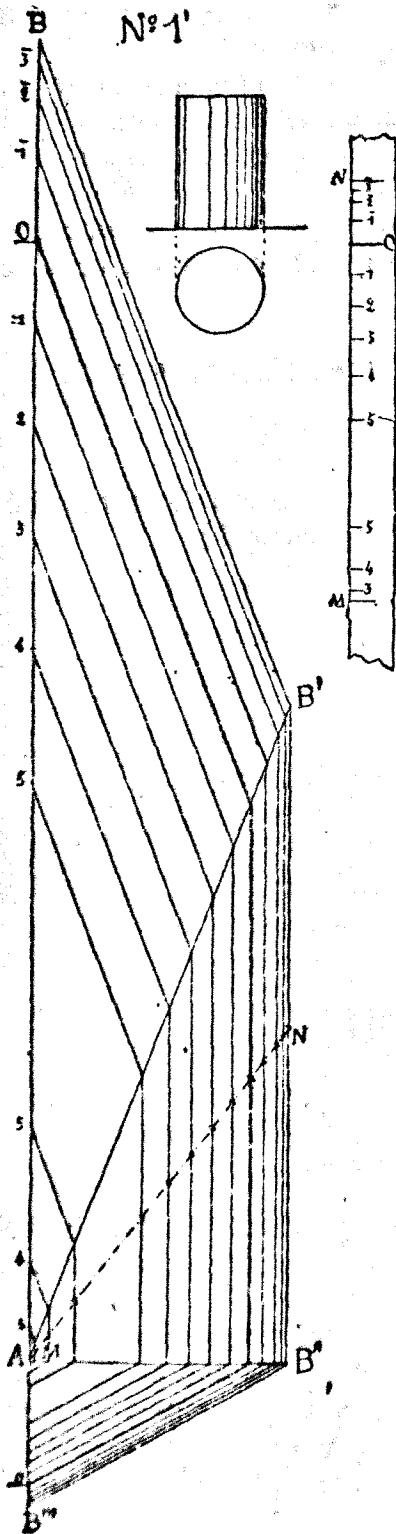
Prenons la sphère-type en élévation, mais, placée dans sa vraie position et non pas comme sur l'épure de la dernière leçon. Regardons pour cela cette épure en prenant la ligne de terre x_1y_1 horizontale.

Un cylindre, dans la position de celui que nous étudions et qui serait circonscrit à la sphère la toucherait suivant le grand cercle $p'q'$ projeté en ligne droite.

Relevons les points de rencontre 0, 1, 2, 3 ... $\bar{1}$, $\bar{2}$, $\bar{3}$... de la droite $p'q'$ et des lignes de teinte et nous aurons en mn l'échelle qui conviendra pour ce cylindre.

5. CONSTRUCTION DE L'ÉCHELLE DE PROPORTION.

(Voir échelle n° 1. Corps mi-polis.)



Cette échelle ainsi construite ne pourrait nous servir que pour un cylindre ayant 120 millimètres de diamètre ; afin de pouvoir l'utiliser pour tout autre cylindre plus petit, nous avons construit une échelle de proportion de la manière suivante. (Voir à la fin du volume et figure ci-contre.)

En AB sur une verticale, nous avons reporté l'échelle précédente. Par les points de division nous avons mené des parallèles obliques jusqu'à une seconde droite AB' ; par les points ainsi obtenus de nouvelles parallèles jusqu'à une troisième droite AB'' et de même jusqu'à une quatrième ligne AB dont la longueur est de 14 millimètres. Nos parallèles vont donc en se rapprochant, sans pour cela que leur distances cessent de rester proportionnelles.

Cela posé, si nous avons un cylindre dont le diamètre soit compris entre 14 et 120 millimètres, sur une bande de papier MN : Nous relèverons exactement sa largeur, puis, plaçant une de ses extrémités M au point A (ne pas oublier de le mettre au point A) nous déplacerons l'autre extrémité N jusqu'à ce que ce point s'inscrive sur une de nos lignes extrêmes BB'B'''.

Nous marquerons les points de rencontre, sur notre bande de pa-

pier, en ayant soin d'écrire les numéros et nous reporterons ensuite notre division sur la base du cylindre.

Remarque. — Si le cylindre avait un diamètre plus grand que 120 ou plus petit que 14 millimètres, on sait comment, à l'aide d'un angle et de parallèles, on pourrait réduire ou amplifier une division donnée.

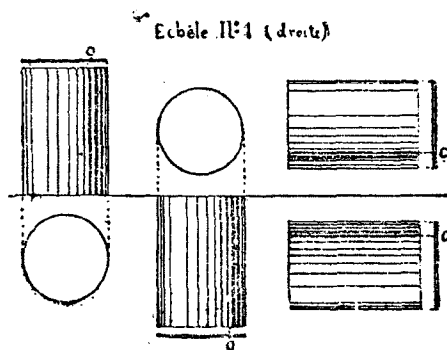
La plupart des cônes ou des cylindres que nous rencontrerons dans nos dessins, auront des dimensions comprises dans les limites de nos échelles.

6. CYLINDRES AUXQUELS S'APPLIQUE L'ÉCHELLE N° 1.

1° Cylindres en relief.

L'échelle n° 1, s'applique aux cylindres en relief dont les génératrices sont perpendiculaires au plan vertical ;

(Fig. 2 bis.)



Perpendiculaires au plan horizontal ;

Parallèles à la ligne de terre.

(Voir fig. 2 bis.)

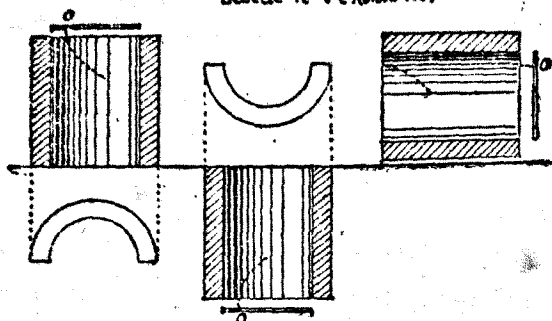
2° Cylindres en creux.

Elle s'applique aussi (mais en la *renversant*, c'est-à-dire en plaçant l'ombre du côté où nous venons de placer la lumière), aux cylindres creux dans les mêmes positions.

Dans ces derniers, l'ombre propre se complique d'une ombre portée ; cependant les lignes de séparation des teintes se traceront sans avoir égard à l'ombre portée. Nous montrerons dans une leçon suivante comment on doit modifier les teintes lorsqu'elles sont dans l'ombre portée. (Voir fig. 2 ter.)

(Fig. 2 ter.)

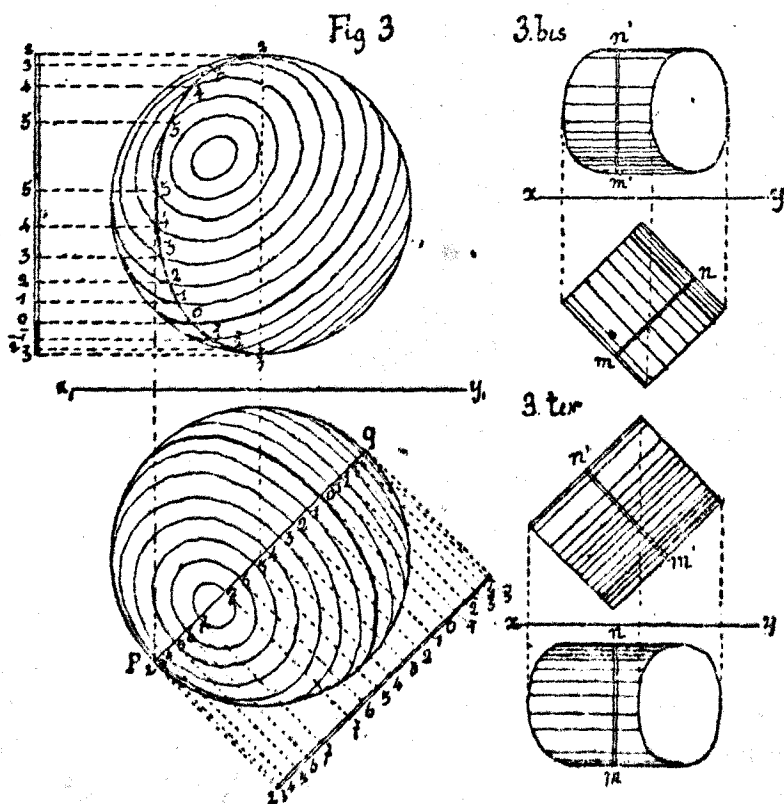
Echelle N° 4 (Renversée)



7. CYLINDRES A 45° EN LUMIÈRE.

Prenons la sphère (fig. 3, 3 bis, 3 ter) donnée avec ses lignes de teintes, et par ses deux projections.

Circonscrivons-lui un cylindre dans la position 3 bis, c'est-à-dire ayant ses génératrices horizontales, inclinées à 45° en pro-



ection horizontale, et perpendiculaires à la direction du rayon lumineux,

Nous disons qu'il est en lumière parce que certains de ses points seront éclairés au maximum.

La courbe de contact est un grand cercle projeté horizontalement suivant la ligne droite pq , et verticalement suivant une ellipse (fig. 3).

Nous prendrons, en projection horizontale les points où la droite pq coupe les lignes de teintes, et nous aurons l'échelle n° 2 des cylindres à 45° en lumière et en plan.

(Cette échelle ne s'applique qu'au plan.)

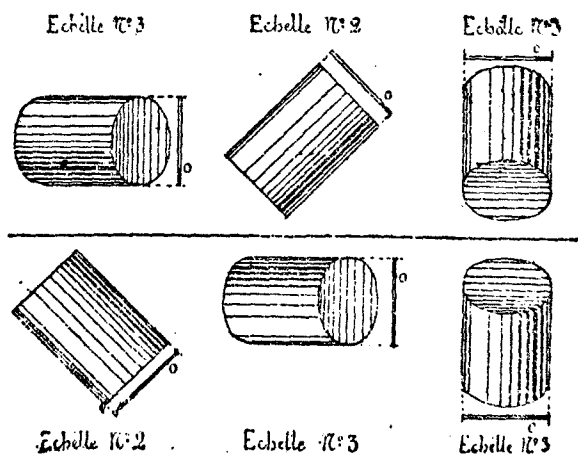
En projection verticale, nous prendrons les points 0, 1, 2, 3.... $\bar{1}$, $\bar{2}$, $\bar{3}$... où l'ellipse de contact coupe les lignes de teinte et nous aurons l'échelle n° 3 du cylindre à 45° en lumière et en élévation.

8. CYLINDRES AUXQUELS S'APPLIQUENT LES ÉCHELLES N° 2 ET N° 3.

1° *Cylindres en relief.* — Les figures ci-jointes font mieux comprendre les positions de ces cylindres qu'une explication.

A côté de chaque cylindre nous avons inscrit le numéro de l'échelle qui s'y applique (fig. 4).

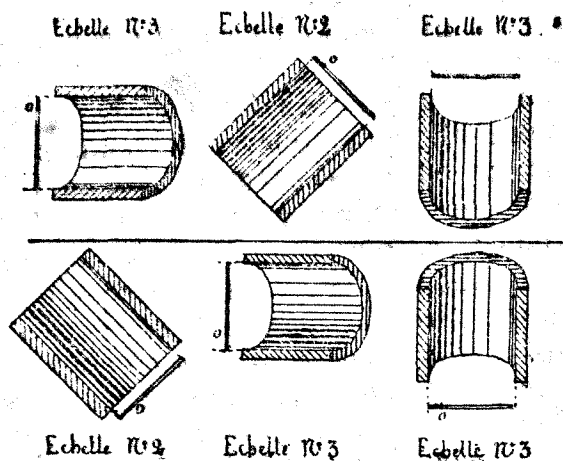
(Fig. 4.)



2° *Cylindres en creux.* (Échelles renversées.)

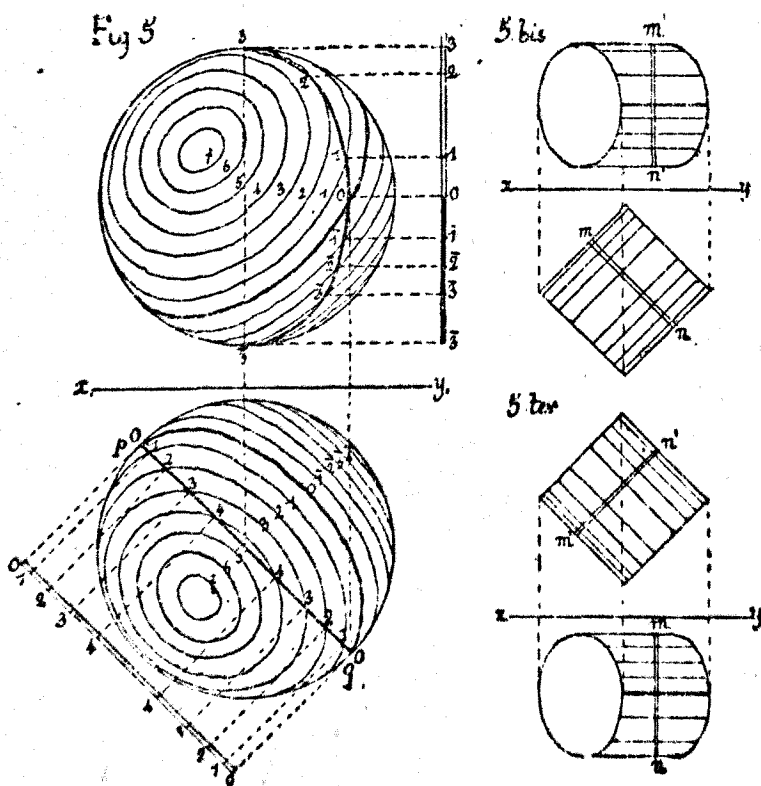
Voir (fig. 4 bis.)

(Fig. 4 bis).



9. CYLINDRES A 45° DANS L'OMBRE.

Dans cette position figure 5, 5 bis et 5 ter, le cylindre est



encore à 45° , mais en projection horizontale, ses génératrices sont parallèles au rayon lumineux.

Nous le disons dans l'ombre parce qu'aucun de ses points ne sera en pleine lumière.

La courbe de contact en plan est une ligne droite pq ; en élévation c'est une ellipse ; on relèvera les points comme on vient de faire pour le cylindre précédent et l'on aura deux échelles qui s'appliqueront : *droites*, aux cylindres en relief, et *renversées*, aux cylindres en creux. Nous les désignerons ainsi :

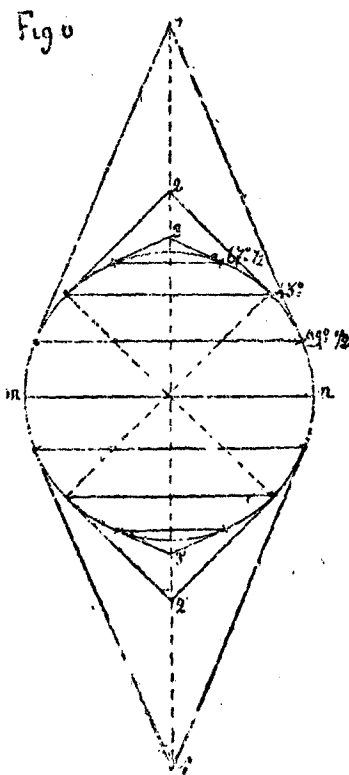
Échelle n° 4. Cylindre à 45° . Dans l'ombre et en plan.

Échelle n° 5. Cylindre à 45° . Dans l'ombre et en élévation.

Nous n'avons pas jugé nécessaire de figurer les positions des cylindres en relief ou en creux auxquelles s'appliquent les échelles 4 et 5. Elles sont analogues à celles dont nous avons donné le dessin, pour les échelles 2 et 3; seulement elles sont orientées perpendiculairement au rayon lumineux et non plus parallèlement.

10. CONES.

Nous ne considérerons que les cônes dont les axes seront, soit



perpendiculaires au plan horizontal, soit perpendiculaires au plan vertical, soit parallèles à la ligne de terre.

Divisons la demi-circonférence de contour apparent de la sphère en quatre parties égales ; ce qui nous donnera des arcs de $22^{\circ} \frac{1}{2}$, 45° , $67^{\circ} \frac{1}{2}$, et 90° . Le quart de 90° est $22^{\circ} \frac{1}{2}$, la moitié est 45° , les trois quarts sont $67^{\circ} \frac{1}{2}$. Menons les parallèles correspondants, tant à la partie supérieure qu'à la partie inférieure et circonscrivons les cônes le long de ces parallèles, nous aurons ainsi trois cônes 1, 2, 3, la pointe en haut et trois cônes 1', 2', 3' la pointe en bas (fig. 6).

Les demi-angles au sommet de ces cônes seront de $22^{\circ} \frac{1}{2}$, 45° et $67^{\circ} \frac{1}{2}$, le plus aplati étant ce dernier.

Nous allons faire voir sur l'un d'eux seulement, le cône à $22^{\circ} \frac{1}{2}$, pointe en haut, comment nous traçons l'échelle qui sert pour l'élévation et celle qui sert pour le plan.

11. CÔNE A $22^{\circ} \frac{1}{2}$. POINTE EN HAUT, POINTE EN BAS.

(Fig. 7, 7 bis et 7 ter.)

Prenons les deux cônes S et S' inscrits sur les parallèles $p'q'$ et $p''q''$ qui correspondent à l'arc de $22^{\circ} \frac{1}{2}$.

Comme nous l'avons expliqué, les points 0, 1, 2, 3, 4, 1, 2, où les droites $p'q'$ et $p''q''$ sont coupées par les lignes de teintes, donnent les divisions des deux échelles en élévation ; nous nous en servons comme à l'ordinaire en plaçant les points de division sur la base.

(Voir le cône 7 bis en élévation.)

L'échelle en plan est plus difficile à prendre d'une manière simple.

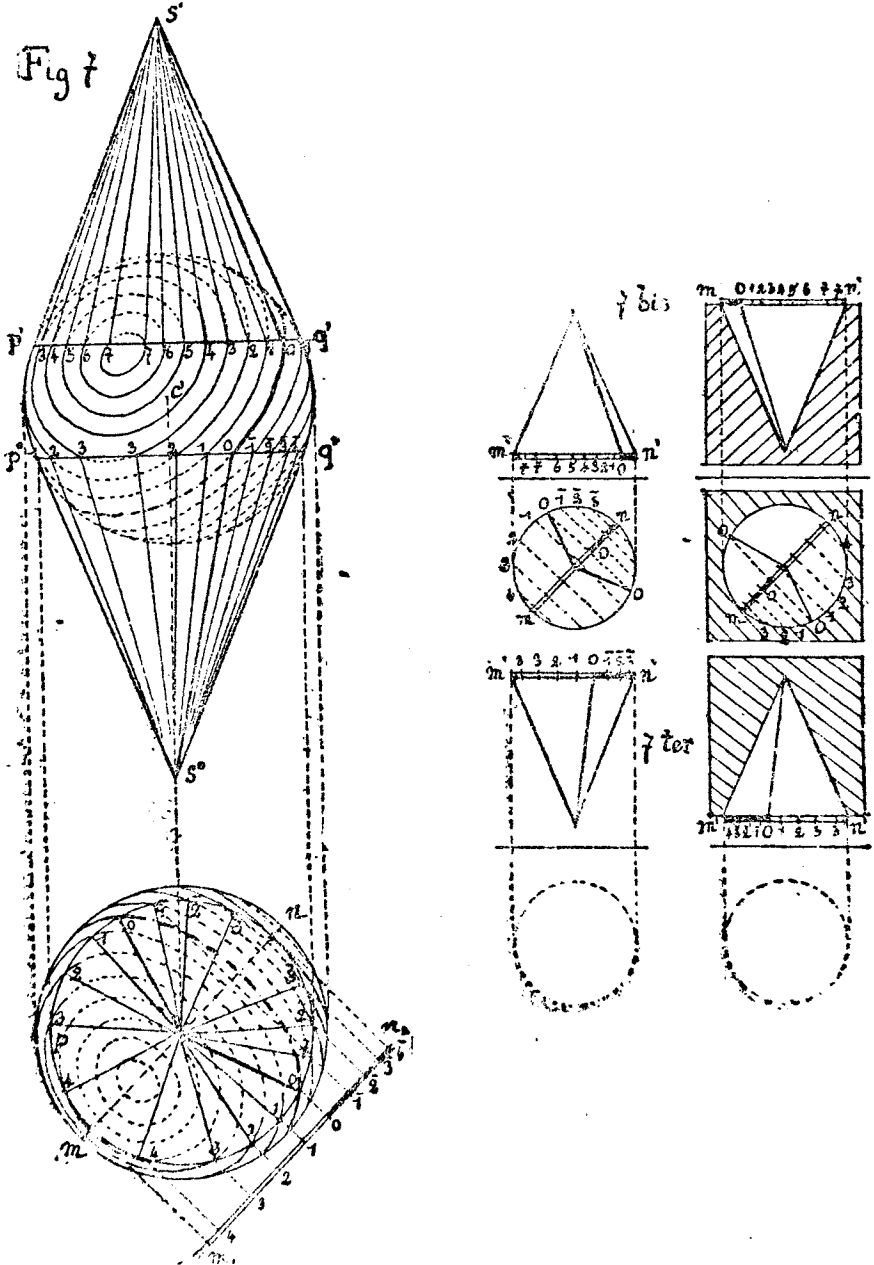
Remarquons d'abord que le cône, pointe en bas, ne donnera rien en plan, puisque sa base le masquera. Nous nous occuperons donc seulement pour le plan, du cône, pointe en haut.

On a tracé le cercle 0, 1, 2, 3, 4, projection horizontale du parallèle de contact ; par les points où ce cercle coupe les lignes de teintes, on a fait passer les lignes de teintes du cône. Elles divergent toutes du sommet.

Or, remarquons qu'à cause de la symétrie ; les points sont deux à deux symétriques par rapport à la ligne à 45° mn. Nous avons donc eu l'idée de les projeter sur cette ligne, ou ce

qui revient au même sur la parallèle m_1n_1 ; ce qui nous a donné notre échelle.

Pour nous en servir sur un cône en plan (fig. 7 bis) lorsque ce cône a son demi-angle au sommet égal à $22^{\circ} \frac{1}{2}$; par le centre de sa base, nous menons la ligne à 45° $m n$.



Nous prenons la longueur mn sur une bande de papier,

nous l'inscrivons, comme il a été expliqué, dans l'échelle de proportion n° 7 ; nous relevons les divisions, nous replaçons la bande de papier en mn , et nous y reportons nos points de division ; menant ensuite par ces points des perpendiculaires à mn , c'est-à-dire d'autres lignes à 45° , nous avons par recoupement avec le cercle de base du cône, les extrémités de nos lignes de teintes, qu'il ne restera plus qu'à numéroter et à faire passer par le sommet.

Nous désignerons les échelles ainsi obtenues de la manière suivante :

Échelle n° 6. Cône à $22^\circ \frac{1}{2}$, pointe en haut, en élévation.

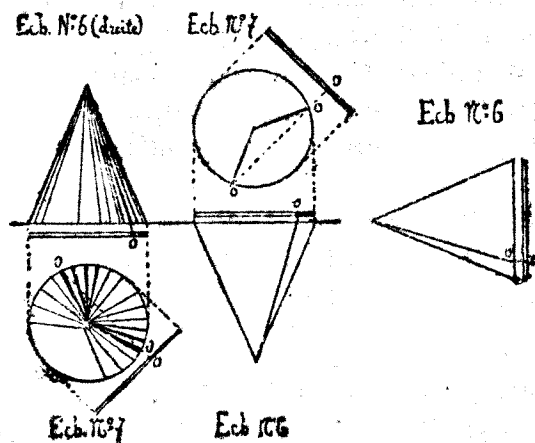
Échelle n° 7. Cône à $22^\circ \frac{1}{2}$, pointe en haut, en plan.

Échelle n° 8. Cône à $22^\circ \frac{1}{2}$, pointe en bas en élévation.

12. CONES AUXQUELS S'APPLIQUENT LES ÉCHELLES N° 5, N° 6 ET N° 7.

Ces échelles s'appliquent à des cônes en relief et à des cônes creux, de $22^\circ \frac{1}{2}$, pointe en haut ou en bas, que les croquis ci-contre (fig. 8 et 9) feront mieux connaître qu'une description détaillée.

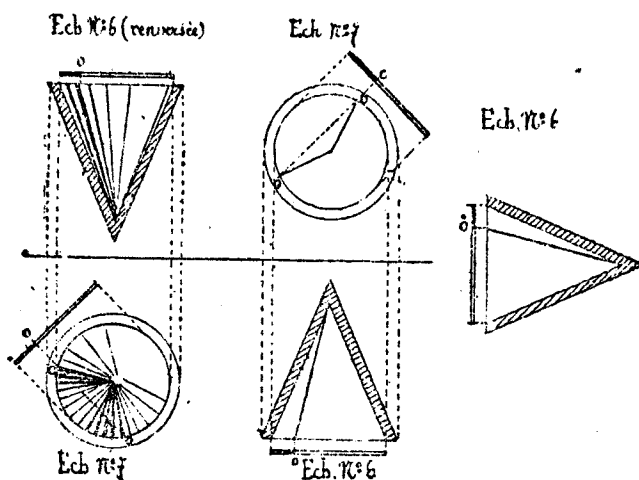
(Fig. 8.)



Pour ne pas rendre la figure confuse, nous n'avons indiqué sur nos échelles que le point n° 0, c'est-à-dire celui qui donne

la ligne d'ombre propre. Il est évident que, pour les autres points, le relevé se fera de la même manière.

(Fig. 9.)



13. AUTRES CONES.

Les échelles des autres cônes ont été tracées exactement de la même manière que les précédentes. Nous ne dirons donc rien de ce tracé. Nous donnerons seulement leur désignation.

Pour le cône à 45° nous aurons :

Échelle n° 9. Pointe en haut, en élévation.

n° 10. Pointe en haut, en plan.

n° 11. Pointe en bas, en élévation.

Cône à $67^\circ \frac{1}{2}$.

Échelle n° 12. Pointe en haut, en élévation.

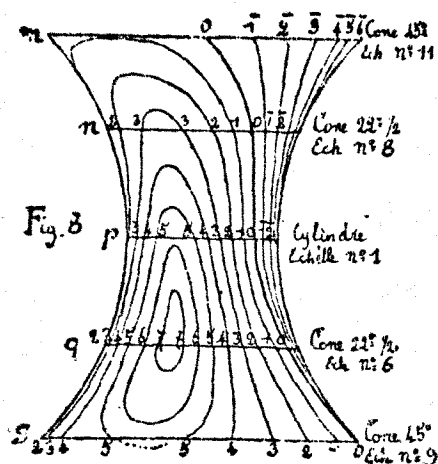
n° 13. Pointe en haut, en plan.

n° 14. Pointe en bas, en élévation.

14. USAGE DES ÉCHELLES POUR TRACER LES LIGNES DE TEINTES SUR UNE SURFACE DE RÉVOLUTION, EN ÉLÉVATION.

Soit fig. 8, une surface de révolution en élévation. Son méridien peut être formé par une courbe quelconque. Pour simplifier, nous avons pris comme méridien un arc de cercle m, n, p, q concave.

Menons à la courbe méridienne des tangentes, verticales, à 45° , à $22^\circ \frac{1}{2}$, et à $67^\circ \frac{1}{2}$, et déterminons les parallèles qui correspondent aux points de tangence.



1° Supposons que le parallèle p soit celui qui correspond à la tangente verticale.

Un cylindre vertical qui aurait pour base ce parallèle serait circonscrit à la surface. Sur la ligne p , portons l'échelle n° 1, des cylindres parallèles aux arêtes du cube et nous aurons en 0, 1, 2, 3 $\bar{1}$, $\bar{2}$ des points de la ligne d'ombre, et des lignes de teintes.

2° Supposons qu'en n et en q la tangente fasse avec l'axe un angle de $22^\circ \frac{1}{2}$.

Au parallèle n correspondrait un cône circonscrit de $22^\circ \frac{1}{2}$ et la pointe en bas. Nous lui appliquerons l'échelle n° 8 et nous aurons en n des points de teintes 0, 1, 2, 3, etc.

Au parallèle q correspondra un cône à $22^\circ \frac{1}{2}$ pointe en haut. Nous appliquerons l'échelle n° 6.

3° Prenons enfin les tangentes à 45° et soient m et s les parallèles correspondants. Sur la ligne m , nous appliquerons l'échelle n° 11 des cônes à 45° pointe en bas ; sur la ligne s , celle n° 9 des cônes à 45° pointe en haut.

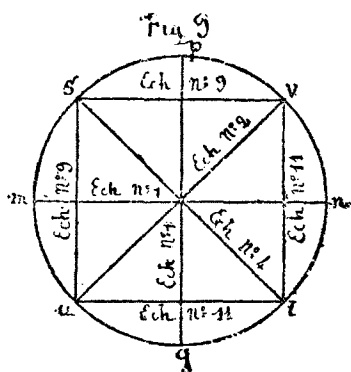
Ayant ainsi nos points numérotés avec soin sur les lignes m , n , p , q , s , nous joindrons par des lignes continues les points de même ordre. Nous aurons au n° 0 la ligne d'ombre propre, et aux autres numéros les différentes lignes de teintes.

15. TRACÉ DES LIGNES DE TEINTES SUR UNE SPHÈRE QUELCONQUE.

Étant donnée une sphère quelconque en élévation ou en plan (nous la supposons ici en élévation) (fig. 9), nous mènerons le diamètre horizontal mn et le diamètre vertical pq . Les cylindres qui seraient circonscrits à la sphère suivant ces diamètres seraient dans la position à laquelle se rapporte l'échelle n° 1.

Nous relèverons les points sur cette échelle et nous les marquerons sur les deux lignes mn et pq .

Nous mènerons ensuite le diamètre à 45° st (parallèle au rayon lumineux) ; un cylindre circonscrit à la sphère suivant ce diamètre sera dans la position de 45° en lumière et en plan (échelle n° 2). Nous relèverons les points sur cette échelle et nous les placerons sur st .



Menons l'autre diamètre à 45° uv . Nous nous servirons pour ce diamètre de l'échelle n° 4, cylindre à 45° dans l'ombre et en plan.

Les points ainsi obtenus nous permettront le plus souvent de tracer nos lignes de teinte et d'ombre avec assez d'exactitude.

Si nous voulions plus de points encore, nous mènerions les deux lignes sv , su suivant les parallèles à 45° . Nous appliquerions l'échelle des cônes à 45° pointe en haut en élévation (éch. n° 9) :

Joignant ensuite tu et vt , nous nous servirions pour ces lignes de l'échelle des cônes à 45° pointe en bas en élévation (éch. n° 11).

Quand nous aurons ainsi assez de points, numérotés bien exactement, nous les joindrons par des lignes continues, que nous savons être des ellipses et nous aurons nos lignes de teintes.

16. ÉCHELLE DU CONTOUR APPARENT CIRCULAIRE, ÉCHELLE N° 15.

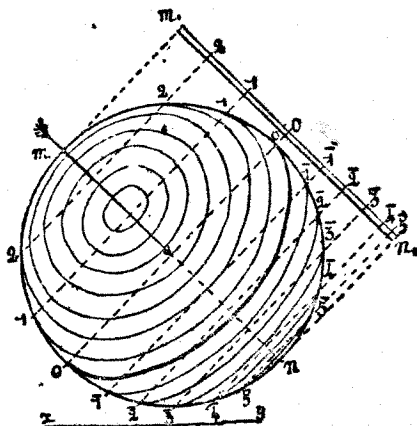
On a remarqué, déjà, l'importance qu'il y aurait à connaître dans la sphère les points où les ellipses se perdent dans le contour apparent.

Nous donnons une échelle n° 15 qui permettra de tracer ces points.

Soit (fig. 10) la sphère-type (vue en élévation par exemple), et sur laquelle sont tracées les lignes de teintes. Menons la ligne à 45° mn , projection du rayon lumineux ; prenons les points 0, 1, 2, 3, 4 $\bar{1}$, $\bar{2}$, $\bar{3}$, $\bar{4}$ où les ellipses se perdent dans le contour apparent.

Ces points sont symétriques deux à deux par rapport à la ligne mn .

Fig. 10



Si nous ramenons les points 0, 1, 2, 3..... sur la droite m_1n_1 , menée parallèlement à mn et en dehors de la sphère, la droite m_1n_1 sera l'échelle demandée. Nous nous en servirons comme nous nous servons des échelles des cônes vus en plan.

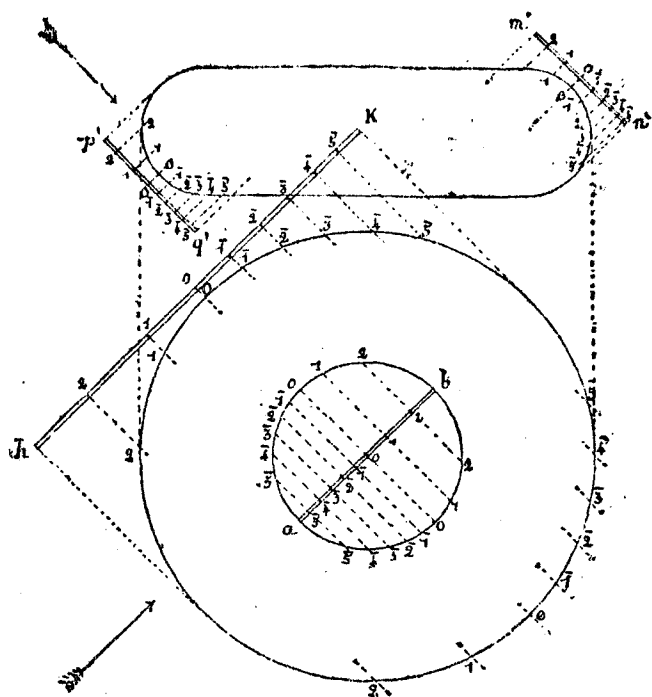
Cette échelle n° 15 s'appliquera non-seulement à la sphère, pour trouver les points sur le contour apparent, mais à toute surface de révolution dont le contour apparent sera un cercle, que ce soit en projection verticale ou horizontale.

Exemple. — Pour un tore, elle nous donnera, sur le plan, placée en ab , les points des courbes de teintes situés sur le contour apparent intérieur (fig. 11).

Placée en hK , les points sur le contour apparent extérieur.

En élévation, elle nous fournira, placée en $m'n'$ et $p'q'$, les points des courbes situés sur les deux cercles de contour apparent vertical.

Fig. 11.



17. OBJET DE LA PLANCHE N° 5.

Travail des élèves pour la prochaine leçon.

La planche n° 5 est une application des principes précédents au lavis des cylindres, des cônes, des sphères et des surfaces dont il vient d'être question.

On supposera que les corps dont on doit faire le lavis sont mi-polis. On aura donc recours à la 2^e série des échelles.

Quoique nous n'ayons pas encore parlé des couleurs et des teintes conventionnelles, nous ferons cette planche en nous servant de la couleur. Nous supposerons que les corps que nous avons sous les yeux sont en fer, en bronze ou en fonte. Nous donnerons dans la prochaine leçon la composition des teintes qui doivent servir à rendre ces trois matières.

Pour la prochaine leçon, les élèves devront avoir fait, à l'encre assez noire, les titres, le cadre, et le trait des contours apparents ; et au crayon, les lignes de teintes. S'ils veulent pouvoir nettoyer facilement leur feuille à la gomme élastique avant de faire le lavis, ils pourront même tracer les lignes de teintes à l'encre excessivement pâle.

En outre, ils devront avoir passé la teinte d'ébauche sur tout ce qui est dans l'ombre, c'est-à-dire sur toutes les parties des surfaces occupées par les lignes négatives.

Cette teinte d'ébauche est une teinte d'encre de Chine, ni trop claire ni trop foncée. On en verra d'ailleurs l'échantillon sur le modèle du lavis que les élèves auront sous les yeux.

Le travail sera fait en deux semaines. Dans la prochaine leçon on expliquera la manière d'achever ce lavis.

6^e LEÇON.

COULEURS ET POSE DES TEINTES.

1. Nous allons exposer dans cette leçon les lois de la classification des couleurs et celles de leur mélange.

Nous indiquerons ensuite sommairement :

1^o Ce que l'on doit entendre par l'intensité ou la transparence d'une teinte ;

2^o Les effets résultant de la superposition de plusieurs teintes de transparences connues ;

3^o Les modifications apportées à une teinte par l'addition d'une certaine quantité d'eau ou d'une autre teinte ;

4^o La classification des teintes sur la sphère et sur les corps étudiés précédemment ;

5^o La manière de poser ces teintes.

2. PRINCIPE DES COULEURS.

Tons simples et purs.

La lumière blanche est la réunion des lumières colorées. L'expérience du prisme prouve ce fait. La série des couleurs est extrêmement nombreuse.

En peinture, lorsqu'on ne cherche pas l'expression rigoureuse des faits, on admet trois couleurs simples, que nous appellerons les *tons simples* et qui par leur réunion forment le blanc,

Le jaune, qui est une couleur brillante et claire ;

Le rouge, couleur éclatante et demi-claire ;

Le bleu, couleur sombre ;

Le noir est l'absence de lumière, ce n'est pas une couleur.

Lorsque ces tons sont à leur maximum d'intensité et qu'ils ne

sont mêlés ni de noir ni de blanc, on dit que ces tons sont *purs*.

3. TONS RABATTUS, TONS ÉCLAIRCIS.

S'ils sont mêlés de noir, on dit que les tons sont *rabattus*, s'ils sont mêlés de blanc, on dit qu'ils sont *éclaircis*.

On peut figurer par une fraction l'intensité du rabattement et de l'éclaircissement.

Par exemple, un ton rabattu à $\frac{2}{10}$, $\frac{3}{10}$, renfermera $\frac{2}{10}$, $\frac{3}{10}$ de noir.

Éclairci à $\frac{2}{10}$, $\frac{5}{10}$, il renferme $\frac{2}{10}$ ou $\frac{5}{10}$ de blanc.

Rabattu à $\frac{10}{10}$. Ce serait du noir absolu.

Éclairci à $\frac{10}{10}$. Ce serait du blanc absolu.

4. TONS COMPOSITES DE 1^{er} ORDRE,

Purs, rabattus ou éclaircis.

Les tons composites de 1^{er} ordre proviennent du mélange à peu près en parties égales des tons simples.

Le bleu et le rouge donnent le violet ;

Le rouge et le jaune donnent l'orangé ;

Le jaune et le bleu donnent le vert.

Si les tons qui se mélangent sont purs, les tons composites le sont aussi ; s'ils sont éclaircis ou rabattus, il en sera de même du ton résultant.

5. TONS COMPOSITES DE 2^e ORDRE.

Si on mélange un ton simple avec un ton composite de 1^{er} ordre, on aura un ton de 2^e ordre, qui tirera plus vers l'un des deux tons simples que vers l'autre.

On voit que ces tons seront au nombre de six, que l'on désignera ainsi ; leur nom fait suffisamment comprendre la loi de leur mélange :

Vert-jaune,

Vert-bleu,

Violet-rouge,
Violet-bleu,
Orangé-rouge,
Orangé-jaune.

6. TONS COMPOSITES DE 3^e ORDRE.

En composant un des tons de 2^e ordre avec les tons simples, ou avec les tons de premier ordre, on aura des tons de 3^e ordre.

Ils seront au nombre de 12 :

1. Vert-jaune-jaune. — 2. Vert-jaune-vert. — 3. Vert-bleu-bleu. — 4. Vert-bleu-vert. — 5. Violet-rouge-rouge. 6. — Violet-rouge-violet. Etc., etc.....

7. COULEURS COMPLÉMENTAIRES.

Deux couleurs sont complémentaires l'une de l'autre lorsque, par leur combinaison, elles donnent du blanc ou du gris sans couleur.

Proposons-nous de trouver la couleur complémentaire du bleu.

Le bleu uni au rouge et au jaune forment du blanc, puisque le blanc est la réunion des trois couleurs simples. Donc, étant donné du bleu, pour obtenir du blanc, il faut lui ajouter un mélange de jaune et de rouge, c'est-à-dire de l'orangé.

L'orangé et le bleu sont complémentaires.

Au rouge, il faudrait ajouter du bleu et du jaune, c'est-à-dire du vert ; le vert et le rouge sont complémentaires ; et au jaune, du rouge et du bleu, c'est-à-dire du violet. Le jaune a pour complémentaire le violet.

La connaissance des couleurs complémentaires est très-nécessaire aux peintres ; nous en étudierons les propriétés dans le cours de 4^e année.

8. LAVIS EN CAMAÏEU, C'EST-A-DIRE FAIT AVEC UN SEUL TON.

Les camaïeux sont des peintures faites avec un seul ton.

Les photographies sont des camaïeux. Les faïences faites tout en bleu ou en rouge, de même.

Un lavis à l'encre de Chine seule, est aussi un camaïeu.

9. RENDRE DES COULEURS A L'ENCRE DE CHINE SEULE.

Comment rendra-t-on d'une manière approchée les effets des couleurs dans un lavis à l'encre de Chine seule ?

Il est facile de voir que :

Le *jaune* étant la couleur la plus claire, les objets colorés en jaune seront rendus par des teintes très-légères d'encre de Chine.

Le *rouge*, étant éclatant mais demi-clair, la teinte d'encre de Chine devra être plus soutenue.

Le *bleu* étant sombre, la teinte qui le rendra devra se trouver plus intense encore.

Les couleurs composites, suivant qu'elles se rapprocheront, plus du bleu ou du jaune, seront rendues par des tons d'encre plus intenses ou plus légers.

10. COULEURS DONT ON SE SERVIRA DANS LE COURS.
TEINTES CONVENTIONNELLES.

Les élèves devront se munir des couleurs suivantes :

Encre de Chine.

Ocre jaune.	}	Jaunes.
Gomme gutte.		
Sæpia	}	Rouges.
Terre de Sienne brûlée.		
Carmin.	}	Bleu.
Bleu de Prusse		

On adopte, dans le dessin de machines, les teintes conventionnelles suivantes, pour rendre les colorations des principales substances que l'on rencontre en mécanique.

Nous indiquons la composition et la proportion des couleurs qui les forment.

Fer, tôle, acier	}	Bleu de Prusse	18
		Encre de Chine	2
Fonte	}	Bleu de Prusse	15
		Encre de Chine	4
		Carmin	1
Laiton, bronze	}	Gomme gutte	18
		Carmin	2
Cuivre rouge	}	Terre de Sienne brûlée	10
		Carmin	10

Bois	{	Ocre jaune	4
		Sépia	4
		Siennie brûlée	10
		Carmin	2
Terrains	{	Sépia et terre de Siennie brûlée, avec touches plus intenses, faites au pinceau.	
Ouvrages en coupe. .		Carmin très-étendu.	

11. CAUSES DE LA COULEUR DES OBJETS.

Un objet éclairé par la lumière blanche, nous paraît coloré parce que la lumière blanche qu'il reçoit à sa surface est décomposée. Une partie est absorbée, l'autre est renvoyée, et comme ces deux parties formaient du blanc avant la décomposition, il faut qu'elles soient complémentaires.

Ainsi donc, la surface d'un corps qui nous paraît coloré, nous renvoie la couleur qui est celle de l'objet et absorbe la couleur complémentaire.

Exemple. — Une feuille d'or très-mince paraît rouge par réflexion et verte par transparence.

Le rouge et le vert sont complémentaires.

12. SURFACE SATURÉE, POSITION D'ÉCLAIRAGE A SATURATION, A SOUS-SATURATION ET A SUR-SATURATION.

On conçoit qu'il existera un instant où la limite d'absorption de la surface sera atteinte.

A partir de ce moment, si l'on éclaire davantage la surface, soit en augmentant la source lumineuse, soit en orientant l'objet de manière à rendre sa surface plus normale aux rayons lumineux, toute la lumière blanche reçue ne sera pas décomposée ; une portion seule le sera, l'autre, nous sera renvoyée intacte ; l'objet nous paraîtra de sa couleur propre, mais éclairée ou délayée de blanc.

Au contraire, partant de la position limite, si, par l'un des deux procédés indiqués, changement d'intensité lumineuse, ou changement d'orientation, nous diminuons la lumière reçue, elle sera tout entière décomposée ; mais la lumière étant plus faible, l'objet nous paraîtra plus sombre. La couleur sera rabattue.

En dessin géométrique, la source de lumière, étant le soleil,

este toujours la même; nous ne compterons donc pour faire varier la couleur et l'éclat que sur le changement d'orientation.

Comme il nous faut un point de départ tout à fait défini, quoique conventionnel, nous conviendrons de dire qu'un plan est à la limite de saturation, et par conséquent à son maximum de coloration, ni éclairci de blanc, ni rabattu de noir, lorsqu'il est parallèle à l'une des faces en lumière du cube de lumière, c'est-à-dire, parallèle au plan vertical, parallèle au plan horizontal, ou mieux encore, parallèle au plan de projection sur lequel se fait la projection que l'on regarde; et nous appellerons *orientation saturée*, celle qui correspond à l'une de ces trois positions.

13. ORIENTATIONS SUR-SATURÉES ET SOUS-SATURÉES.

Si le plan passe de la position saturée à une autre, et s'il est frappé plus normalement par la lumière; il se *sur-sature* et doit être fait plus blanc et moins coloré:

S'il fait le contraire, il se *sous-sature*, et doit être fait à peu près aussi coloré, mais plus noir.

14. CLASSIFICATION DES TONS DES TEINTES.

Si nous nous reportons à la sphère, sur laquelle toutes les teintes sont représentées, nous diviserons les zones en plusieurs catégories (Voir fig. 1, page 89).

1^o Zone brillante.

C'est la zone $\overline{7, 7}$ qui forme le point brillant de la sphère. Sur les corps polis ou mi-polis, cette zone restera toute blanche, ou extrêmement peu colorée. On sait que cette zone n'existe pas sur le cylindre vertical, mais qu'on la trouve sur le cylindre à 45° en lumière et en plan, et non pas sur le même cylindre en élévations; sur le cône à $22^\circ \frac{1}{2}$ en élévation et pas en plan, sur le cône à $67^\circ \frac{1}{2}$ en plan.

2^o Zones claires.

Ce sont les zones $\overline{7-6}$ et $\overline{6-5}$.

La première donne un blanc qui n'existe pas sur le cylindre

vertical; la seconde correspond à la zone la plus claire du cylindre vertical (Echelle n° 1). On voit donc, et c'est une remarque très-importante à faire, que la zone brillante du cylindre ne vient que deux rangs après celle de la sphère. On devra donc, dans les dessins soignés, tenir les brillants des cylindres (position n° 1) moins clairs que ceux des sphères et des corps ronds sur lesquels la zone $\widetilde{7}, \widetilde{7}$ existe.

3° Zone moyenne ou saturée.

C'est la zone 5.4, qui correspond au point milieu de la sphère. Il est évident qu'en ce point le plan tangent à la sphère est parallèle au plan vertical, et par suite, dans la position que nous avons appelée à orientation saturée:

Sur cette zone, le solide possède toute la couleur qu'il est susceptible d'avoir; et nous devons combiner nos teintes de telle sorte que, par leur accumulation successive sur la zone 5.4, elles donnent sur cette région la même couleur que celle que nous appliquerions sur le même objet s'il était plan et parallèle au plan de projection. Nous indiquerons tout à l'heure la manière d'arriver à ce résultat sans tâtonnements.

Remarque. Ces zones ne sont remplies que par les teintes de couleur à différents degrés d'intensité, sans aucune trace de la teinte d'ombre; il n'en est pas de même des zones suivantes :

4° Zones en demi-teintes.

Ce sont les zones 4-3 — 3-2 — 2-1, et 1-0.

Ces zones nous conduisent graduellement à l'ombre propre, et c'est avec la teinte d'ombre à différents degrés, passée sur le fond de couleur qui résultera des teintes précédentes, que nous les remplirons.

5° Zones d'ombre propre.

Ce sont toutes les zones affectées de numéros négatifs, et situées dans l'ombre propre des surfaces. La plus intense sera la teinte, 0 — $\bar{1}$, la plus claire serait la zone $\bar{7} — \bar{7}$.

6° Zones d'ombres portées.

Ces zones n'existent pas dans le lavis qui fait l'objet de la

planche 5, mais elles existeront dans d'autres. Ce sont toutes celles qui, étant situées dans des ombres portées eussent été dans la lumière sans l'existence de ces ombres. Nous démontrerons qu'elles sont plus sombres encore que les zones d'ombre propre, et d'autant plus sombres, qu'elles eussent été plus claires si aucune ombre n'eût été portée sur elles. Ainsi, dans cette catégorie de zones, la zone 7 — 7 serait très-noire, celle 7 6, moins noire et ainsi de suite, si toutefois une portion de ces zones eût été occupée par une ombre portée.

15. DE L'INTENSITÉ OU MIEUX DE LA TRANSPARENCE DES TEINTES.

Une teinte d'encre de Chine ou de couleur, appliquée sur le papier, agit comme un verre coloré ou teinté, qui ne laisse passer qu'une fraction de la lumière qui émane de ce papier.

Nous appellerons, transparence d'une teinte, la fraction de lumière que laisse passer cette teinte.

Par exemple, la transparence d'une teinte sera $\frac{2}{3}$ si elle laisse passer les $\frac{2}{3}$ de la lumière, et $\frac{3}{4}$ si elle laisse passer les $\frac{3}{4}$

La transparence d'une teinte d'eau serait 1, car elle laisserait passer toute la lumière qui émane du papier. La transparence du noir absolu serait 0, car il ne laisserait rien passer.

Une teinte aura donc sa transparence représentée par une fraction toujours plus petite que l'unité.

L'opacité ou l'intensité d'une teinte serait la fraction de lumière qu'elle retient ; on voit que l'intensité est complémentaire de la transparence, par rapport à l'unité.

En effet une teinte qui laissera passer $\frac{2}{3}$ de la lumière, dont la transparence sera par conséquent $\frac{2}{3}$ retiendra $\frac{1}{3} = 1 - \frac{2}{3}$.

Si nous désignons la transparence par la lettre T, et l'intensité par la lettre I, on aura donc toujours

$$T + I = 1.$$

16. THÉORÈME SUR LES TEINTES SUPERPOSÉES.

Lorsque l'on superpose deux teintes, de transparence T et T' , la transparence finale T'' est égale au produit $T \times T'$ des transparences des deux premières teintes.

En effet, soit $T = \frac{2}{3}$ la transparence de la première teinte ; cette teinte ne nous transmet donc que les $\frac{2}{3}$ de l'éclat du papier ; si nous en appliquons une autre de transparence $T' = \frac{5}{7}$, elle nous transmettra les $\frac{5}{7}$ de ce que la première laissait passer, c'est-à-dire les $\frac{5}{7}$ de $\frac{2}{3}$ ou $\frac{5}{7} \times \frac{2}{3}$. La transparence finale est donc $T'' = T \times T' = \frac{2}{3} \times \frac{5}{7} = \frac{10}{21}$.

C. Q. F. D.

17. EFFET DE LA SUPERPOSITION D'UN NOMBRE n DE TEINTES ÉGALES ENTRE ELLES.

Soit T la transparence d'une teinte; pour fixer les idées, prenons $T = \frac{1}{2}$. Si nous la passons une première fois, l'éclat du papier sera réduit à $\frac{1}{2}$.

Après une seconde fois, la transparence sera $T \times T = T^2$: c'est-à-dire $\frac{1}{4}$.

Après une troisième fois, ce sera T^3 ou $\frac{1}{8}$ et après n fois, ce sera T^n .

Ce qui prouve que, tandis que le nombre des teintes croît en progression arithmétique, l'éclat du papier décroît en progression géométrique.

18. EFFET D'UNE TEINTE DONNÉE SUR DEUX TEINTES PRIMITIVES, L'UNE FAIBLE, L'AUTRE FORTE.

Soit une teinte de transparence $\frac{1}{2}$ par exemple : nous l'appliquons une première fois sur un papier teinté déjà par une

einte de transparence assez grande, $\frac{6}{7}$ par exemple. La transparence finale est $\frac{6}{7} \times \frac{1}{2} = \frac{6}{14}$.

Si nous l'appliquons sur un papier déjà sombre, et recouvert préalablement d'une teinte, $\frac{1}{3}$ par exemple; la transparence finale sera $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$.

Dans le premier cas, la différence entre la transparence primitive et finale est $\frac{6}{7} - \frac{6}{7} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{6}{7} = \frac{6}{14}$.

Dans le second cas, elle sera de $\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.

La différence est beaucoup plus grande dans le premier cas que dans le second, ce qui explique un effet bien connu; savoir: que la même teinte passée sur 2 teintes primitives, l'une claire et l'autre sombre, produira un assombrissement relatif plus grand dans le premier cas que dans le second.

19. CLASSIFICATION DES TEINTES.

Nous diviserons nos teintes en quatre séries:

1^{re} série. La teinte d'ébauche (teinte n° 0).

2^e série. Teintes d'ombres propres et de demi-teintes, au nombre de quatre. Teintes n° 1, n° 2, n° 3, n° 4.

3^e série. Teintes de couleurs, au nombre de trois, n° 5, n° 6 et n° 7.

4^e série. Teintes d'ombres portées, au nombre de trois, n° 8, n° 9, n° 10.

En tout onze teintes que l'on composera de la manière suivante et que l'on passera dans l'ordre que nous allons indiquer.

20. ORDRE DE POSE DES TEINTES, LEUR TRANSPARENCE TEINTE D'ÉBAUCHE.

La teinte d'ébauche se place la première et se met sur *tout ce qui est dans l'ombre propre ou portée.*

C'est une teinte d'encre de Chine, dont la transparence doit être environ $\frac{2}{3}$.

On composera facilement cette teinte de la manière suivante. On prendra de l'encre de Chine aussi noire que possible (du poché); avec le tire-ligne, on fera des traits parallèles distant de 1 millimètre en 1 millimètre. Ces traits auront $\frac{1}{3}$ de millimètre d'épaisseur.

Le quadrillage ainsi formé une fois sec et vu à distance, fera l'effet d'une teinte dans laquelle il y aurait deux de blanc pour un de noir, et par suite laissant passer les $\frac{2}{3}$ du blanc du papier; cette teinte aurait donc pour transparence $\frac{2}{3}$.

Cela fait, on frottera l'encre de chine dans le godet renfermant de l'eau, jusqu'à ce que la teinte formée soit équivalente à cette teinte par quadrillage que nous venons de former, et l'on aura la teinte $\frac{2}{3}$.

D'ailleurs, quand on aura fait un certain nombre de lavis, on saura exactement par l'habitude quelle doit être la teinte d'ébauche.

21. TEINTES D'OMBRE PROPRE.

Faisons notre démonstration sur la sphère-type que nous connaissons (Fig. 1).

La teinte d'ébauche n°0 a été placée sur l'ombre propre, c'est-à-dire sur la zone qui s'étend depuis la ligne d'ombre propre n° 0 jusqu'au contour apparent dans l'ombre.

La teinte suivante, n° 1, sera plus faible que la teinte n° 0. On étendra cette dernière de $\frac{1}{2}$ environ d'eau pure.

Puis on la placera entre les lignes 1 et $\bar{1}$.

La teinte n° 2 s'obtiendra en ajoutant à la teinte 1 environ $\frac{1}{3}$ d'eau pure.

On l'étendra de 2 à $\bar{2}$.

Pour la teinte n° 3, on ajoutera à la teinte n° 2 environ $\frac{1}{4}$

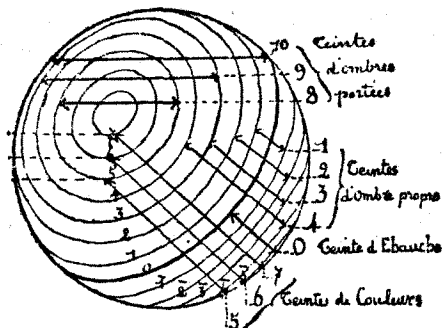
'eau, et on la passera de 3 à $\bar{3}$.

La teinte n° 4 s'obtiendra en ajoutant au n° 3 environ $\frac{1}{5}$

'eau, et se passera de 4 à $\bar{4}$.

Là s'arrêteront les premières teintes d'ombre, celles d'ombre propre : lorsque nous aurons passé les teintes de couleurs qui

Fig. 1.



vont suivre, nous reprendrons d'autres teintes d'ombres (celles d'ombres portées, qui seront plus intenses que les précédentes).

Sur la planche n° 5, il n'existe pas d'ombres portées ; il n'y aura donc pas de ces teintes d'ombres portées. Nous n'en parlerons que pour mémoire.

22. TEINTES DE COULEURS.

Teinte n° 5. C'est la première teinte de couleur et la plus intense d'entre elles.

Elle sera diversement composée, suivant que l'objet sera en fonte, fer, bronze ou autre substance.

Une fois connue la nature de l'objet, il faudra cependant calculer cette teinte de telle sorte que, par sa superposition avec les suivantes, elle donne, au milieu, entre 3 et 4, le ton que nous avons désigné sous le nom de ton à saturation.

Cette teinte n° 5 sera passée de $+ 5$ à $\bar{5}$, et si la ligne $\bar{5}$ n'existait pas, si le contour apparent se rencontrait avant, cette teinte serait passée jusqu'à ce contour.

La teinte n° 6 s'obtiendra en étendant un peu la précédente, et sera passée de $+ 6$ à $\bar{6}$, ou de $+ 6$ jusqu'au contour apparent.

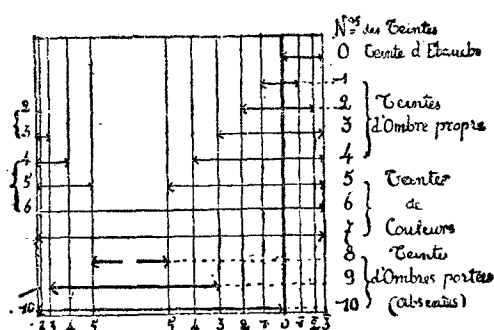
La teinte n° 7 s'obtiendra en étendant un peu la précédente, et sera passée de $+ 7$ à $\bar{7}$.

Il n'y aura pas de teinte n° 8. Ce serait de l'eau pure, ou du moins une teinte très-faible, si on ne veut pas avoir des brillants qui soient blanc absolu.

23. REMARQUE (fig. 2)..

Sur le cylindre (position de l'échelle n° 1), on remarquera que, lorsque nous serons à la teinte n° 6, la teinte de gauche rejoindra celle de droite et toute la zone brillante 5-5 sera comblée par cette teinte, qui aura par suite été passée sur tout le cylindre.

Fig. 2.



La teinte n° 7, de même.

Donc, le brillant du cylindre sera en retard de deux teintes sur celui de la sphère.

Nous avons figuré ici, sur une sphère et sur un cylindre, à l'aide de flèches, les zones sur lesquelles se passent les teintes précédentes (Voir fig. 1 et 2).

L'inspection de ces figures fera bien retenir, nous le pensons, l'ordre dans lequel on doit opérer.

24. TEINTES D'OMBRES PORTÉES.

Elles seront au nombre de trois, quoique les zones qu'elles soit appelées à recouvrir soient au nombre de huit; mais, comme elles seront assez intenses, on pourra recouvrir à la fois trois ou deux de ces zones; il sera donc possible d'en diminuer le nombre.

Nous ne nous occuperons de ces teintes que dans un lavis où nous aurons des ombres portées.

25. TRAVAIL DES ÉLÈVES.

Pour la prochaine leçon, les élèves exécuteront le lavis de la planche 5, en se conformant soigneusement aux indications qui précèdent.

Ils trouveront sur le modèle, des échantillons des teintes successives qu'ils auront à poser ; ils n'auront donc que peu de tâtonnements à faire pour trouver les tons.

Ce dessin est très-important. Il serait impossible à un élève qui ne l'aurait ni bien compris ni bien exécuté de pouvoir faire ceux qui suivront.

C'est pourquoi on fera refaire tous ceux qui seraient mauvais.

Dans la suite du cours, on donnera, comme *pensum*, cette planche à exécuter en entier ou en partie à tout élève qui se montrerait insuffisant en lavis.

7^e LEÇON.

OMBRES PORTÉES SUR LE PLAN VERTICAL OU SUR DES PLANS PARALLÈLES.

1. Nous commencerons, dans cette leçon, l'étude des ombres portées par les corps les uns sur les autres. Pour simplifier, nous nous occuperons d'abord des ombres portées sur le plan vertical de projection ou sur des plans parallèles. Le rayon lumineux étant toujours à 45° .

2. OMBRE D'UN POINT (Fig. 1).

Soit aa' un point défini par ses projections, et dont nous cherchons l'ombre sur le plan vertical.

Nous mènerons par ce point un rayon lumineux à 45° aa_1 $a'a'_1$, et nous chercherons sa trace verticale $a_1a'_1$, c'est-à-dire le point où il perce le plan vertical.

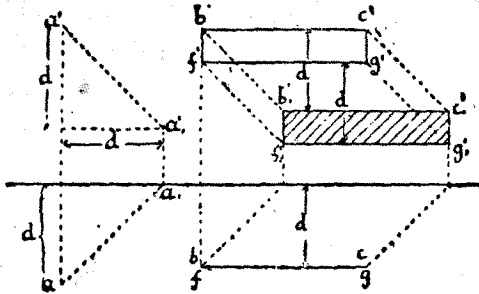
Le point a'_1 sera l'ombre portée par le point aa' .

3. REMARQUE FONDAMENTALE.

Désignons par d la distance ou saillie du point donné, en avant du plan vertical. Il est facile de voir, à cause des angles à 45° que l'on rencontre partout sur cette figure, que $a''a = d$, et que le point a'_1 , ombre portée par a' , se trouve sur la ligne à 45° issue du point a' , à une distance d au-dessous et d à droite de ce point a' . De sorte que la simple connaissance de la distance à laquelle le point qui porte ombre est en avant du plan vertical permet de trouver l'ombre de ce point sur le plan vertical.

Il ne faut pas compter la distance d sur la ligne à 45° ; ce serait une grave erreur, mais bien sur la verticale puis, ensuite, sur

Fig. 1 et 2.



l'horizontale, qui formeraient un carré ayant la ligne à 45° comme diagonale.

4. OMBRE D'UNE DROITE HORIZONTALE, OU D'UNE DROITE VERTICALE. OMBRE D'UN RECTANGLE (Fig. 2).

Soit $b'c'f'g'$ un rectangle parallèle au plan vertical et situé à une distance d , en avant de ce plan.

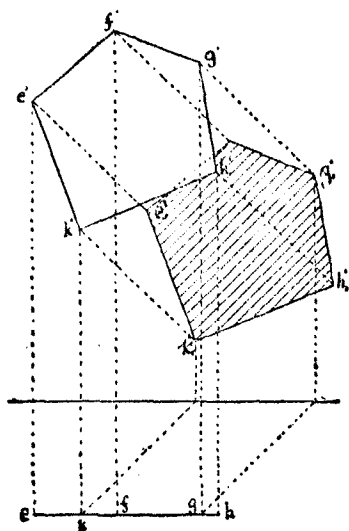
Nous aurons l'ombre portée en cherchant les ombres portées par les quatre sommets. On voit facilement que la ligne $b'c'$ porte ombre en $b'_1c'_1$, parallèlement à elle-même, en vraie grandeur, et que l'ombre $b'_1c'_1$ est située au-dessous de la ligne qui porte ombre $b'c'$, d'une quantité égale à d ; de même $c'g'$ porte ombre suivant $c'_1g'_1$ qui lui est parallèle, égale, et située à sa droite à une distance égale à d .

5. OMBRE PORTÉE PAR UNE FIGURE PLANE PARALLÈLE AU PLAN VERTICAL (Fig. 3 et 4).

Soit un polygone $e'f'g'h'k'$ parallèle au plan vertical. Pour avoir son ombre portée, nous mènerons des rayons lumineux par tous les sommets, et nous chercherons les points où ils viennent percer le plan vertical.

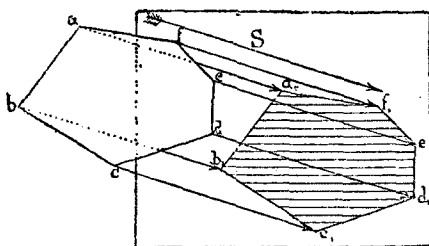
Mais ces rayons forment les arêtes d'un prisme qui est le prisme d'ombre du polygone, et l'ombre portée sera l'intersection de ce prisme avec le plan vertical. Or, on sait que

Fig. 3.



si l'on coupe un prisme par un plan parallèle à sa base, la section ainsi faite est un polygone égal à celui de sa base. Ici, la base est le polygone $e'f'g'h'k'$, qui est parallèle au plan vertical. L'ombre sera donc un polygone $e'1f'1g'1h'1k'1$, égal au premier, et obtenu en le transportant parallèlement à lui-même suivant des lignes à 45° , jusqu'à ce que tous ses points se soient reportés au-dessous et à droite de leur position première, d'une longueur égale à d (saillie du polygone en avant du plan vertical).

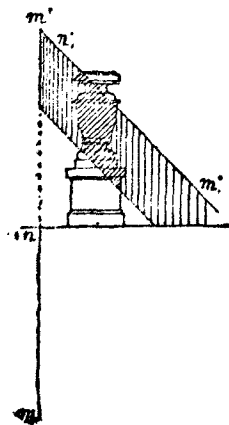
Fig. 4.



6. OMBRE D'UNE DROITE PERPENDICULAIRE AU PLAN VERTICAL (fig. 5).

Soit mn une droite perpendiculaire au plan vertical et projetée verticalement tout entière au point m' .

Fig. 5.



Les rayons lumineux qui passeront par cette droite en constitueront le plan d'ombre. Mais on sait que, lorsqu'une droite est perpendiculaire à un plan Q , tout plan passant par cette droite est aussi perpendiculaire au plan Q ; le plan d'ombre de la droite est donc perpendiculaire au plan vertical. On a vu qu'un pareil plan se projette tout entier sur le plan vertical, suivant une ligne droite qui est sa trace. Menons par m' un rayon lumineux à 45° $m'm'1$; cette droite à 45° sera la trace du plan d'ombre et tout ce qui sera dans ce plan d'ombre, que ce soient les rayons lumineux ou

les intersections de ce plan, avec une surface quelconque, c'est-à-dire l'ombre portée par la droite mn sur cette surface quelconque, tout, disons-nous, se projettera verticalement suivant la ligne à 45° $m'm'_1$. Cette ligne est donc l'ombre portée par la droite mn sur le plan vertical.

De plus, si nous imaginons un corps, quelque compliquée que soit sa surface, un vase ou une statue, par exemple, l'ombre portée sur ce vase étant l'intersection du plan d'ombre avec la surface de la statue, sera projetée tout entière suivant la ligne à 45° qui est la trace verticale du plan d'ombre ; en réalité, dans l'espace, cette ligne d'ombre portée peut être très compliquée de forme, mais en projection verticale nous la voyons en ligne droite. Nous pouvons donc énoncer ce principe :

Toute droite perpendiculaire au plan vertical porte ombre sur un corps quelconque suivant une ligne à 45° en projection verticale.

Remarque. Dans la figure ci-contre, pour rendre le fait plus saisissant, nous avons supposé que nous avons 2 droites, m' et p' perpendiculaires au plan vertical, et formant les 2 bords d'une règle plate, perpendiculaire elle-même au plan vertical.

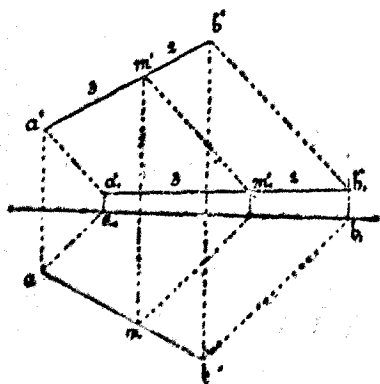
7. OMBRE D'UNE DROITE QUELCONQUE (fig. 6.)

Soit ab , $a'b'$ une droite quelconque : Pour en avoir l'ombre portée sur le plan vertical, nous mènerons les rayons lumineux aa_1 , $a'a'_1$, et bb_1 , $b'b'_1$, qui passent par ses deux extrémités ou par deux de ses points ; nous chercherons les points $a_1a'_1$, $b_1b'_1$ où ces rayons percent le plan vertical, joignant $a'_1b'_1$, par une droite, nous aurons l'ombre demandée.

Remarque 1. On voit que $a'_1b'_1$ n'est pas parallèle à $a'b'$.

Remarque 2. Prenons sur $a'b'$, un point m' qui la partage dans

(Fig 6)



un rapport donné, $\frac{2}{3}$, par exemple.

L'ombre de m' se fera en m'_1 sur l'ombre $a'_1b'_1$, à l'aide du rayon à 45° . Et comme les 3 rayons $a'a'_1$, $b'b'_1$, $m'm'_1$ sont parallèles, le point m'_1 partage aussi la droite d'ombre dans le rapport $\frac{2}{3}$. Donc,

Théorème. Une droite porte ombre sur un plan suivant une droite, et

les rapports suivant lesquels cette droite peut être divisée dans l'espace par des points pris sur elle, se conservent sur l'ombre portée.

8. L'OMBRE PORTÉE SUR UN PLAN PAR UN OBJET EST UNE PROJECTION OBLIQUE DE CET OBJET SUR CE PLAN.

Cette remarque est évidente, puisque nous avons défini les projections obliques celles dans lesquelles les projetantes n'étaient pas perpendiculaires au plan de projection. Dans le cas des ombres, les projetantes sont les rayons lumineux.

Certaines remarques faites sur les projections droites auront leurs analogues dans les projections obliques ou ombres. Nous ne ferons que les énoncer.

1° Les projections obliques (ou les ombres) déforment les figures, modifient les angles, réduisent ou augmentent les longueurs. Dans le cas des projections droites, les longueurs étaient toujours réduites ; ici, elles peuvent être augmentées. L'ombre d'une droite sur un plan peut être plus grande que la droite elle-même.

2° Toute figure plane parallèle à un plan s'y projette obliquement (ou y porte ombre) en vraie grandeur et parallèlement à elle-même (Fig. 4).

3° Toute figure plane tracée dans un plan parallèle aux projetantes (ou aux rayons lumineux) se projette obliquement sur un plan (ou y porte ombre) suivant une ligne droite. — C'est l'analogue de ce théorème des projections droites: Toute figure plane dont le plan est perpendiculaire à un plan de projection se projette sur ce plan tout entière suivant une ligne droite, qui est la trace du plan qui la contient.

4° Deux droites parallèles se projettent obliquement (ou portent ombre) sur un plan, suivant 2 droites parallèles.

5° Les rapports de plusieurs longueurs portées sur une même droite ou sur plusieurs droites parallèles se conservent.

6° Toute droite parallèle aux projetantes (ou aux rayons lumineux) porte ombre sur un plan ou sur une surface quelconque suivant un point.

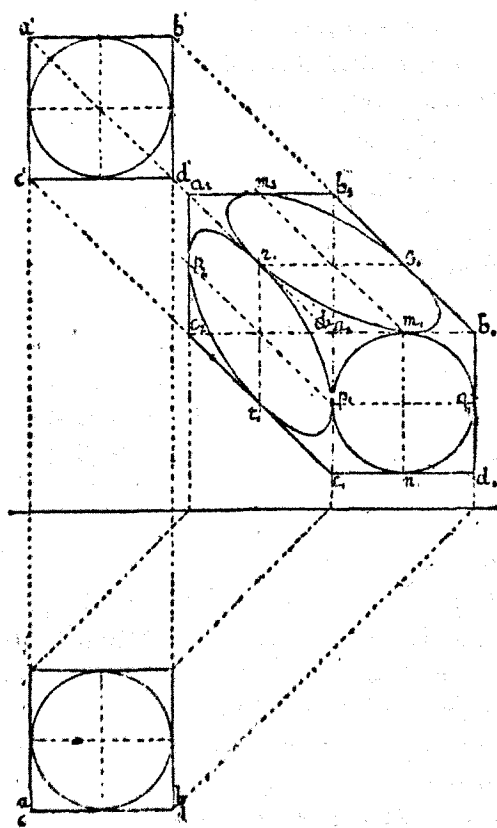
C'est l'analogue de ce théorème des projections droites: Toute droite perpendiculaire à l'un des plans de projection, s'y projette suivant un point.

9. OMBRE D'UN CUBE A ARÊTES PARALLÈLES A CELLES DU CUBE DE LUMIÈRE (Fig. 7).

Soit $abcd$, $a'b'c'd'$ un cube dans la position la plus simple, ayant ses faces parallèles aux plans de projection et parallèles à un plan de profil.

Considérons d'abord la face antérieure $a'b'c'd'$ du cube. Elle donnera comme ombre un carré $a_1b_1c_1d_1$, que l'on obtiendra soit en ayant recours à la projection horizontale, soit, connaissant la

Fig. 7.



saillie de cette face en avant du plan vertical, en reproduisant cette face à droite, en dessous de sa position première à une distance égale à cette saillie (cette distance ne doit pas se compter sur la ligne à 45° , mais bien sur l'horizontale et la verticale).

Ayant en $a_1b_1c_1d_1$ l'ombre de la face antérieure, pour avoir celle de la face postérieure, nous remarquerons que cette face

est plus près du plan vertical que la première de toute la longueur des arêtes du cube. L'ombre de cette face sera donc un nouveau carré $a_2b_2c_2d_2$ obtenu en remontant le premier et en le déplaçant à gauche, de toute l'arête du cube, qui est aussi le côté du carré.

Déplaçons b_1 , de b_1 en a_1 d'une longueur égale au côté du carré, puis remontons-le de a_1 en b_2 , de cette même longueur, et nous aurons en b_2 un des côtés du carré qui est l'ombre portée de la face postérieure.

Nous ferons de même pour les autres sommets, et nous aurons en $a_2b_2c_2d_2$, l'ombre de cette face postérieure. Joignons a_2a_1 , b_1b_2 , c_1c_2 , d_1d_2 , nous aurons les lignes à 45° , qui sont les ombres des arêtes perpendiculaires au plan vertical.

L'ombre du cube s'obtiendrait en remplissant avec des hachures le périmètre formé par les lignes extrêmes de la figure ainsi formée.

10. REMARQUES.

1° On remarquera d'abord que le sommet a_1 de l'un des carrés coïncide avec le sommet opposé d_2 de l'autre.

2° Si l'on considère le parallélogramme $a_1b_1a_2b_2$, c'est l'ombre portée par le carré qui formerait la face supérieure du cube. Si donc nous avions un pareil carré, dont nous eussions à chercher l'ombre, on l'aurait facilement de la manière suivante :

La distance à laquelle est le carré en avant du plan vertical fera connaître en a_1b_1 l'ombre portée par le côté du carré qui est parallèle à la ligne de terre et qui porte ombre en vraie grandeur; on mènera la droite a_1b_2 verticale, et la ligne à 45° b_1b_2 . On aura, à leur intersection en b_2 l'ombre d'un autre sommet, puis on achèvera le parallélogramme $a_1b_1a_2b_2$.

3° Le parallélogramme $a_1c_1a_2c_2$ est l'ombre portée par une des faces du cube qui est de profil. Si donc nous avions à chercher l'ombre d'un carré de profil, ayant un de ses côtés vertical, en a_1c_1 , nous placerions parallèlement au côté vertical et en vraie grandeur l'ombre de ce côté. (La distance de ce côté au plan vertical étant connue, nous savons que son ombre a_1c_1 s'obtiendra à droite, en dessous et à cette distance);

Par a_1 nous mènerons une horizontale et par c_1 une ligne à 45° . A la rencontre de ces deux lignes, nous aurons un autre sommet c_2 du parallélogramme qu'il nous sera ensuite facile d'achever.

4° Ces deux parallélogrammes, ombres d'un carré horizontal ou d'un carré de profil, doivent être tracés facilement par les élèves. Ils remarqueront qu'ils sont égaux et que leur tracé se fait d'une façon identique. On pourrait les définir ainsi : Parallélogrammes dont une diagonale est perpendiculaire à l'un des côtés et lui est égale : ou bien encore, parallélogrammes dont l'angle aigu est un angle de 45° et dont une diagonale est perpendiculaire à un côté.

11. OMBRE DU CERCLE.

Nous admettrons d'abord, sans le démontrer, que l'ombre d'un cercle sur un plan est une ellipse, pouvant dans certains cas se réduire à un cercle ou à une droite. Cela étant admis, on prend deux diamètres AB, CD à angle droit dans un cercle, chacun d'eux partage en deux parties égales les cordes qui sont parallèles à l'autre; et comme les rapports se conservent sur les ombres portées, les cordes qui, dans le cercle, sont parallèles à AB, donneront dans l'ellipse d'ombre portée des cordes parallèles à l'ombre de AB, et qui seront aussi partagées en deux parties égales par l'ombre du diamètre CD. Donc, deux diamètres à angle droit du cercle donneront, sous la même ombre, deux diamètres conjugués de l'ellipse d'ombre, c'est-à-dire, deux diamètres qui partagent en deux parties égales les cordes qui sont parallèles à l'autre.

Comme nous savons tracer une ellipse connaissant deux diamètres conjugués (voir 4^e leçon), nous choisirons dans le cercle dont nous cherchons l'ombre deux diamètres à angle droit, nous en prendrons l'ombre portée, et nous aurons deux diamètres conjugués de l'ellipse d'ombre et par conséquent cette ellipse. Ce sera à nous de prendre les diamètres à angle droit dans le cercle de la manière la plus avantageuse.

12. OMBRE D'UN CERCLE DE FRONT.

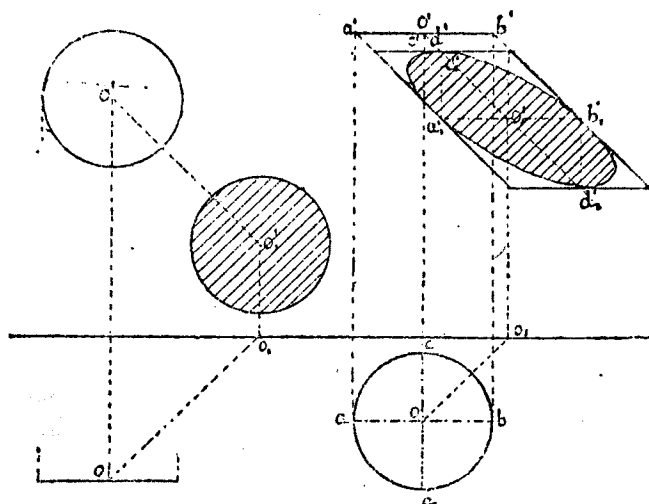
Une figure est dite de front lorsque son plan est parallèle au plan vertical (fig. 8).

Soit oo' le centre de ce cercle.

D'après la remarque faite plus haut, ce cercle portera ombre de sa vraie grandeur. Prenons l'ombre de son centre, en o, o' , et remarquons qu'il ne serait pas nécessaire pour l'avoir, de revenir à la projection horizontale, mais simplement de connaître

la distance du cercle en avant du plan vertical. De o' comme

Fig. 8 et 9.



centre traçons un cercle égal au cercle donné et nous aurons l'ombre.

13. OMBRE D'UN CERCLE HORIZONTAL.

Soit $abcd$, $a'b'c'd'$ un cercle horizontal ou de *niveau*. (Fig. 9)

Nous prendrons deux diamètres à angle droit de ce cercle. Nous choisirons le diamètre ab , qui est parallèle à la ligne de terre, et celui cd qui lui est perpendiculaire et qui, par conséquent, est perpendiculaire au plan vertical.

Nous connaissons la distance du centre, en avant du plan vertical : par suite, soit à l'aide de la projection horizontale soit en nous servant de cette distance, comme nous l'avons indiqué, nous pouvons avoir en O' , l'ombre de ce centre. Menons par o' la droite $a'b'$ horizontale et égale au diamètre du cercle, nous aurons l'ombre du diamètre de front ab , puisque ce diamètre porte ombre parallèlement à lui-même et en vraie grandeur. Par o' menons la droite à 45° $c'd'$, ce sera l'ombre du diamètre cd qui est perpendiculaire au plan vertical ; il nous suffira de prendre les deux points c' et d' à une distance de o' égale au rayon et comptée horizontalement puis verticalement (et non pas sur la ligne à 45°) pour avoir l'ombre des extrémités de ce diamètre.

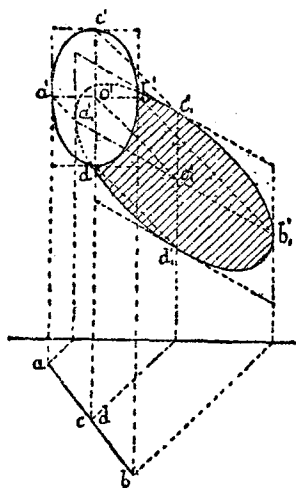
15. REMARQUE.

Si l'on se reporte à l'ombre du cube donnée plus haut et à la figure qui l'accompagne, on y verra inscrits dans le carré $a_1b_1c_1d_1$ et dans les deux parallélogrammes contigus le cercle et les ellipses, ombres de cercles inscrits dans les trois faces du cube de l'espace dont nous cherchions l'ombre.

16. OMBRE D'UN CERCLE SITUÉ DANS UN PLAN PERPENDICULAIRE AU PLAN HORIZONTAL, MAIS, OBLIQUE AU PLAN VERTICAL (fig. 11).

Soient $a'b'c'd'$, les projections d'un cercle situé dans un plan simplement perpendiculaire au plan horizontal.

Fig. 11.



Horizontalement, ce cercle se projette en ligne droite; verticalement, sa projection est une ellipse que nous avons appris depuis longtemps à construire.

Prenons les deux diamètres à angle droit $ab, a'b'$ et $cd, c'd'$, et cherchons leurs ombres: nous aurons deux diamètres conjugués de l'ellipse d'ombre.

Pour cela, par les quatre points aa', bb', cc', dd' , menons les rayons lumineux, et cherchons les points $a_1b_1c_1d_1$ où ils viennent rencontrer le plan vertical. Nous aurons, en a_1b_1 et c_1d_1 , deux diamètres conjugués de l'ellipse. Nous ferons le parallélogramme circonscrit et nous tracerons l'ellipse à l'aide du tracé par échelles.

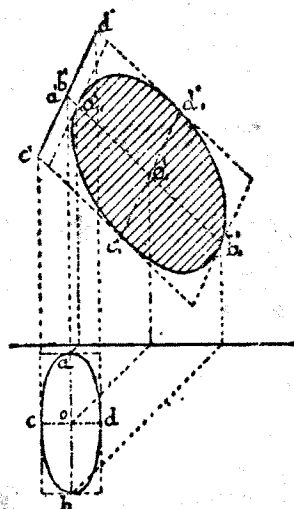
17. OMBRE D'UN CERCLE SITUÉ DANS UN PLAN SIMPLEMENT PERPENDICULAIRE AU PLAN VERTICAL (fig. 12).

Verticalement, le cercle se projette suivant la ligne droite $c'd'$ et horizontalement suivant l'ellipse facile à tracer a,b,c,d .

Nous prenons les deux diamètres à angle droit ab, cd , dont l'un, cd , est parallèle au plan vertical. Il porte ombre en vraie grandeur en $c'd'$; l'autre porte ombre en $a'b'$, obtenue en menant les rayons lumineux par les points aa' et bb' , et cherchant les traces verticales de ces rayons.

Nous avons en $a'b'$ et $c'd'$ deux diamètres conjugués. Nous

Fig. 12.



formons le parallélogramme circonscrit et nous traçons l'ellipse à l'aide des échelles.

18. TRAVAIL DES ÉLÈVES POUR LA PROCHAINE LEÇON.

Pour la prochaine leçon, les élèves dessineront au crayon et à l'encre les figures de la planche 6 qui se rapportent à cette leçon. Les hachures seront mises, ainsi que les lettres qui se rapportent à ces figures.

8^e LEÇON

OMBRES PORTÉES SUR LE PLAN VERTICAL OU SUR DES PLANS PARALLÈLES (Suite)..

1. APPLICATION. OMBRE PORTÉE PAR LES ARCADES D'UN PORTIQUE SUR LE MUR DU FOND DE CE PORTIQUE.

Soit (fig. 3), un portique formé par trois arcades sur la face principale, et une arcade sur chacune des faces latérales. On donne le plan et l'élévation de ce portique. On demande de trouver les ombres portées par ces cinq arcades et leurs pieds-droits sur le mur du fond (en projection verticale) et sur le sol du portique (en projection horizontale).

La question se ramènera aux deux problèmes suivants, que nous allons traiter à part.

2. PROBLÈME 1. (fig. 1.)

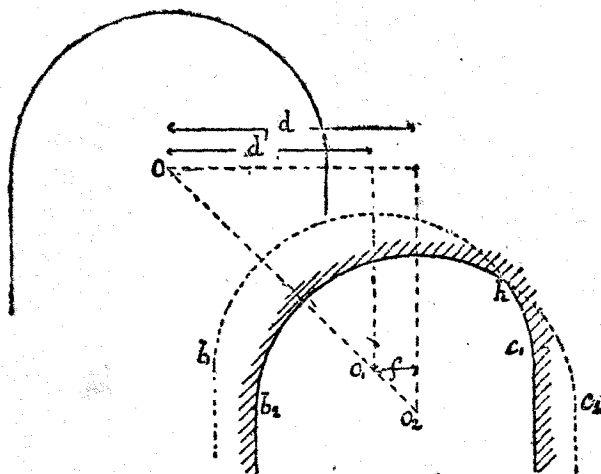
On a deux cercles parallèles tous deux au plan vertical, et placés l'un devant l'autre. (Ce sont les deux cercles qui limitent les arcades de face, antérieurement et postérieurement.) On demande de déterminer l'ombre de leur ensemble.

Soit o , la projection verticale commune des centres de ces deux cercles. Si l'on connaît la distance d , du centre du premier cercle en avant du mur du fond, on aura en o_1 l'ombre de ce centre. On décrira le cercle b_1c_1 , égal au cercle de l'arcade, et l'on aura l'ombre de ce premier cercle.

Si l'on connaît la distance d' du centre du cercle postérieur en avant du fond, ou si, ce qui revient au même, on connaît l'épaisseur f (voir fig. 1) de l'arcade, on aura sur la ligne à 45° qui passe par o_1 et par o , l'ombre o_1 du centre du deuxième

cercle. De o_1 on décrira un nouveau cercle b_1c_1 et l'on aura l'ombre du cercle postérieur de l'arcade.

Fig. 1.



Nous devons garder qu'une portion de ces deux cercles. Ils se coupent en h , et le contour de l'ombre sera formé des deux arcs b_1h et hc_1 avec une brisure au point h .

3. PROBLÈME 2. (fig. 2.)

Deux cercles égaux et parallèles dont les centres sont en $O'O''$ ont tous deux de profil. Ils forment les deux bases d'une arcade située de profil; on demande de déterminer l'ombre portée par leur ensemble sur le plan vertical.

Nous avons figuré en abc l'un de ces cercles, rabattu sur le plan vertical. La ligne MN donne en coupe le mur du fond du portique.

Prenons le cercle de droite OO'' tout seul.

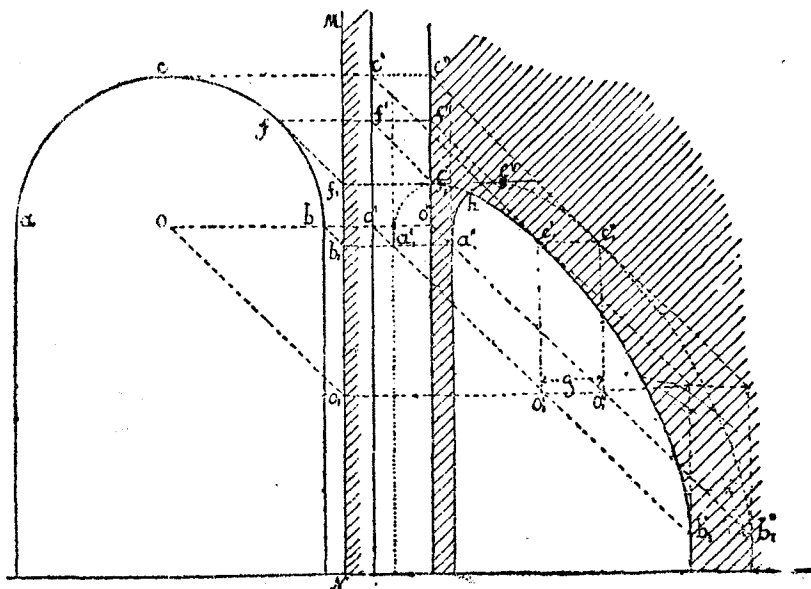
Son centre porte ombre en O''_1 .

Le cercle étant de profil, nous formons, comme il a été indiqué plus haut, le parallélogramme $o_1''c_1''b_1''a_1''$, qui sera circonscrit à l'ellipse d'ombre, et nous traçons cette ellipse par le procédé des échelles, ou directement, si nous avons une habitude suffisante. Nous avons ainsi l'ombre portée par le cercle de droite o'' .

Le cercle de gauche o' donnera la même ellipse mais transportée horizontalement de o_1'' en O'_1 , d'une quantité g égale à l'épaisseur de l'arcade. Ces deux ellipses se couperont en h ,

point de brisure de l'ombre, et nous placerons des hachures jusqu'aux portions $a'h$ et hb'_1 de ces ellipses.

Fig. 2.



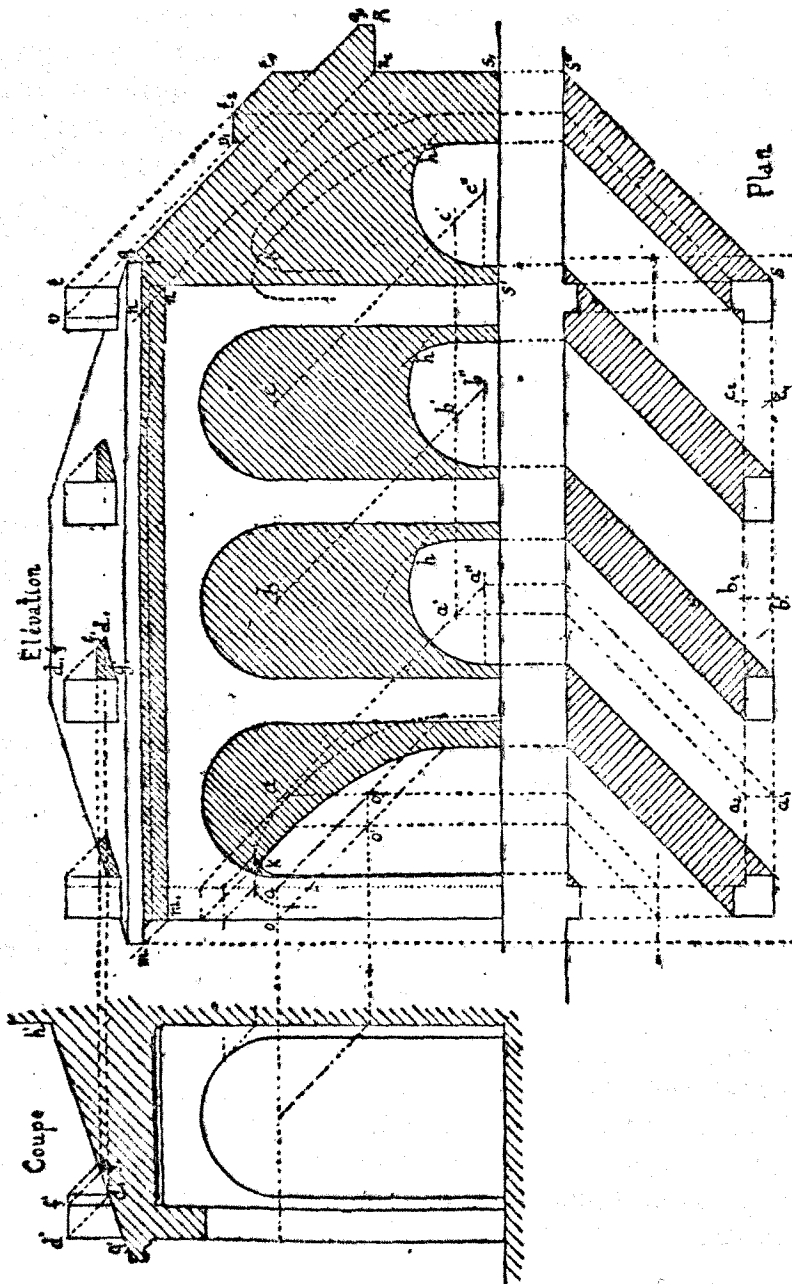
4. OMBRE DU PORTIQUE (Fig. 3).

Il est facile maintenant de tracer cette ombre. Prenons d'abord les trois arcades de face, a, b, c . Nous obtenons en $a'a''$, $b'b''$, $c'c''$, les ombres de leurs centres sur ce mur du fond considéré comme plan vertical. Nous décrivons les cercles de ces points comme centres avec un rayon égal à celui des arcades. Nous prenons comme contours d'ombre les arcs intérieurs de ces cercles, se coupant aux points de brisure h, h, h .

Nous nous occupons ensuite des arcades de profil. Commençons par celle de gauche. Les deux centres o et o_1 portent ombre en $o'o_1$. Nous construisons deux fois le parallélogramme connu. Nous inscrivons dans chacun d'eux une ellipse; nous prenons le point de brisure K , et nous limitons l'ombre aux arcs intérieurs.

L'arcade de gauche donnerait lieu aux deux mêmes ellipses. Mais, après les avoir tracées, nous remarquerons qu'elles tombent en entier au-dessus de l'ombre de la dernière arcade de face par conséquent l'ombre de l'arcade de profil et de droite se noyée dans l'ombre du portique. Elle n'existera pas.

Fig. 3.



5. OMBRE DES DÉS DE COURONNEMENT SUR LE TOIT.

Prenons l'un de ces dés, le second par exemple $d'f'g', d.f.g'$, (voir la coupe). Sur la coupe, le plan du toit est représenté par sa ligne de coupe $g'h'$, et le toit se projette, en coupe, tout en-

tier suivant cette ligne. Prenons le sommet dd' de l'arête de droite du dé. Menons le rayon lumineux à 45° en coupe et en élévation. Il coupe le plan du toit, en coupe, au point d'_1 projeté en élévation, en d_1 . D'un autre côté, l'arête en question sort du toit au point $g'g_1$, qui, étant sur le toit, est lui-même son ombre portée sur ce toit. L'ombre, de l'arête $g'd'$ est donc en élévation la droite $g_1d'_1$.

Remarque. Il est facile de voir que les deux rayons $d'd'_1$ et dd_1 étant parallèles en élévation et en coupe comme étant à 45° tous les deux, le triangle $d'g'd'_1$ en coupe, est égal au triangle dd_1g_1 en élévation et par suite la ligne d'ombre $g_1d'_1$ est parallèle à la ligne $g'd'$ en coupe; d'où cette remarque importante : quand une droite verticale porte ombre sur un toit (ou sur un plan incliné) parallèle à la ligne de terre, cette ombre est une ligne droite inclinée à la pente du toit.

Cette remarque ne sera qu'un cas particulier d'un théorème plus général que nous énoncerons plus loin.

L'arête du dé, projetée en entier en d , sur l'élévation étant perpendiculaire au plan vertical, porte ombre à 45° jusqu'en f' , ombre du point ff' , extrémité de cette arête.

A partir de f_1 c'est l'arête horizontale projetée tout entière en coupe au point f' qui porte ombre. Or cette arête est parallèle à la ligne de terre, le toit l'est aussi, donc cette arête est parallèle au toit et elle porte ombre sur lui parallèlement à la ligne de terre et en vraie grandeur.

6. OMBRE DE LA CORNICHE DE L'ARCADE SUR LE MUR DE FACE DE L'ARCADE.

C'est l'ombre d'une droite mn parallèle à la ligne de terre, sur un plan vertical; on connaît la saillie de la corniche sur le mur de face. Cette saillie se prend à gauche en m .

Menons la ligne à 45° m, m_1 . Nous aurons en m_1 un point de l'ombre de la corniche et en m_1n_1 menée parallèle à mn l'ombre tout entière.

7. OMBRE DES CORNICHES SUR LE MUR DU FOND.

Cherchons d'abord l'ombre de l'arête verticale de droite $s'n_1$. Le plan nous la donne, et à son défaut, la distance de cette arête en avant du mur du fond nous fait connaître la droite n_2s_1 ombre de cette arête.

Or, l'arête dans l'espace n'est en lumière que jusqu'au point n_1 , ombre du point n de la corniche. Le point n_1 porte ombre en n_2 . Donc en n_2 cesse l'ombre de l'arête verticale et commence sur le mur du fond, l'ombre de la corniche.

La portion np de la corniche ne porte pas ombre sur le mur de face. Mais bien sur celui du fond de n_2 en p_1 , en vraie grandeur. On a $n_2p_1 = np$.

Arrivé en p_1 , c'est la droite pq verticale et arête du larmier qui porte ombre en p_1q_1 .

En q_1 c'est l'arête en retour du larmier, perpendiculaire au plan vertical et projetée tout entière au point q , qui porte ombre suivant une ligne à 45° qq_1 .

8. OMBRE DU DERNIER DÉ SUR LE MUR DU FOND.

Nous croyons inutile de donner l'explication de cette ombre. Les lignes à 45° tracées sur le plan et sur l'élévation en feront suffisamment comprendre le tracé. Il présente d'ailleurs la plus grande analogie avec celui de l'ombre du cube.

9. DU RESSAUT DES OMBRES.

Lorsqu'un corps porte ombre sur plusieurs plans parallèles, ou plus généralement encore sur plusieurs surfaces, (cylindres, cônes, etc...), placées les unes derrière ou devant les autres, l'ombre passe de l'une à l'autre de ces surfaces en se rapprochant ou en s'éloignant du corps qui porte ombre et en changeant de forme suivant la nature des surfaces.

Ces mouvements de l'ombre portée constituent ce que l'on nomme le ressaut des ombres. On dit que l'ombre ressaute d'un corps sur l'autre. Nous étudierons le ressaut des ombres dans trois cas simples, qui sont les suivants.

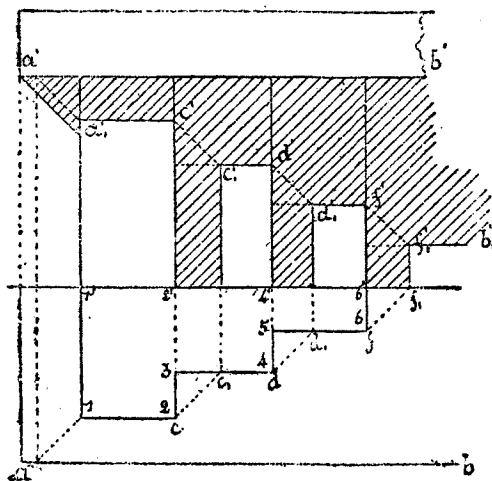
10. RESSAUTS DE L'OMBRE PORTÉE PAR UNE DROITE PARALLÈLE A LA LIGNE DE TERRE, SUR UNE SÉRIE DE PLANS PARALLÈLES AU PLAN VERTICAL (Fig. 4).

Soit $a'b'$ projetée horizontalement en ab et parallèle à la ligne de terre; ce sera, par exemple, l'arête d'un larmier, et soient en 1 2 3 4 5 6 en projection horizontale une série de plans parallèles au plan vertical. Ces plans forment une sorte de mur en gradins, dont la ligne 1 2 3 4 5 6 serait le profil horizontal;

on demande de trouver l'ombre portée par la droite ab , $a'b'$ sur ce mur dentelé. Si l'on se reporte aux principes précédents, l'ombre de $a'b'$ sur les plans successifs qui forment le mur sera sur chacun d'eux formée par une droite parallèle à $a'b'$ et située au-dessous de $a'b'$ à une distance égale à la saillie de la droite en avant de ces plans. Par conséquent lorsque le plan s'éloigne de 1^m, 2^m, ou 3^m, l'ombre descend ou ressaute de 1^m, 2^m, ou 3^m; si le plan se rapproche d'une certaine quantité, l'ombre se rapproche de la même quantité. La ligne brisée a'_1 , b'_1 , ombre portée par ab , reproduit donc en élévation exactement la ligne brisée 1 2 3 4 5 6, coupe horizontale du mur.

Les arêtes verticales 1 1', 2 2', 4 4', 6 6' portent ombre à leur

Fig. 4.



tour sur les plans qui sont situés derrière elles, à droite et à des distances égales aux saillies relatives de ces arêtes sur ces plans. Soient $c_1c'_1$, $d_1d'_1$, $f_1f'_1$ ces ombres. Elles coupent l'ombre précédente aux points de brisure $c'_1d'_1f'_1$. Or, prenons le point c' où l'ombre portée du larmier rencontre l'arête 2'. Le point c' est un point de l'ombre portée du larmier, mais c' appartenant à l'arête 2', portera ombre sur le plan 3, 4, et comme l'ombre du larmier sur le plan 3 4, est la droite $c'd'_1$, si nous menons le rayon à 45° du point c' jusqu'à la rencontre avec $c'd'_1$, nous aurons en c_1 un point de l'ombre portée par l'arête 2' sur le plan 3 4; ce qui nous dispense d'avoir recours au plan pour trouver les ombres portées par les arêtes, une fois que l'on a l'ombre portée par le larmier sur les plans et

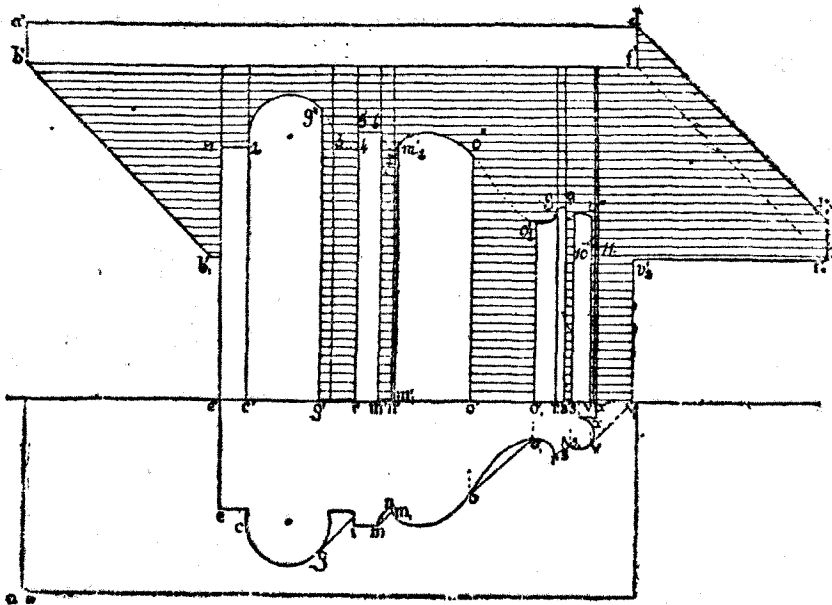
par conséquent aussi sur les arêtes, intersections de ces plans. La même remarque, faite aux points d' et f' ou l'ombre portée par le larmier sur les plans rencontre les arêtes qui les limitent, permet de trouver directement en d', f' les points de brisure et par suite les ombres des arêtes.

11. OMBRE PORTÉE PAR UNE DROITE PARALLÈLE A LA LIGNE DE TERRE, SUR UNE SÉRIE DE MOULURES PERPENDICULAIRES AU PLAN HORIZONTAL (Fig. 5).

Soit un larmier $b'f'$ portant ombre sur une série de moulures, (filets, baguettes, talons...), dont les profils sont donnés en projection horizontale.

La connaissance de la saillie du larmier en avant du filet *ec*, nous donne à une distance égale à cette saillie et en dessous la droite 1 2, de l'ombre portée sur ce filet; ce sera le commencement de l'ombre. Nous venons de démontrer que, dans ces conditions, l'ombre reproduisait exactement le profil des moulures. Traçons donc le profil 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11, identique à celui du plan, mais symétrique, et nous aurons l'ombre cherchée. Il faut y ajouter les ombres des moulures les unes sur les

Fig. 5.



autres. A cet effet, sur le plan, menons : 1^o en g , o , et v les tangentes à 45° à tout ce qui est cylindre ; 2^o en m , et s par

toute ligne formant arête de droite, menons également les rayons à 45° ; 3° Prenons en m, o, s, v , les intersections de ces deux espèces de rayons avec les moulures situées immédiatement après eux; enfin, relevons ces points en projection verticale en $g'-o'$ et v' , puis en $m'_1-o'_1$ et v'_1 , et menons par ces points des parallèles aux génératrices des moulures, et nous aurons résolu cette 2^e partie du problème. Les points de brisure seront aux rencontres de ces lignes d'ombre des moulures avec la ligne d'ombre portée du larmier.

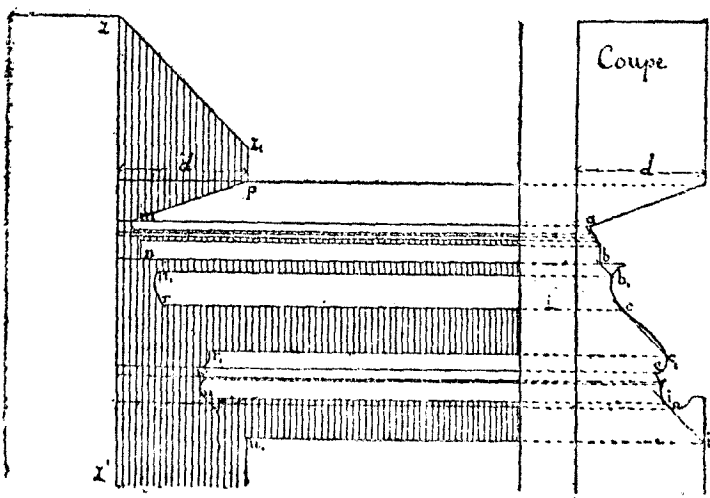
Remarque 1. Si on voulait se passer du plan, puisque la ligne d'ombre 1,2,3,... 11 est la reproduction du plan, on aurait pu mener les tangentes à 45° et les rayons passant par les arêtes, sur cette ligne au lieu de le faire sur le plan.

Remarque 2. Les points de brisure, tels que m'_2, o'_2 et v'_2 , sont sur les rayons à 45° qui passeraient par les points où l'ombre cesse sur la moulure située immédiatement avant. Ainsi les points 6 et m'_2, o'' et o'_2, v'' et v'_2 doivent être sur un même rayon à 45° .

12. OMBRE PORTÉE SUR DES MOULURES PARALLÈLES A LA LIGNE DE TERRE PAR UNE DROITE PERPENDICULAIRE AU PLAN HORIZONTAL (Fig. 6).

Tout ce que nous venons de dire s'applique aux ombres portées dans ces conditions.

Fig. 6.



Nous donnons comme exemple l'ombre portée par l'arête

verticale zz' , d'un mur sur une série de moulures parallèles à la ligne de terre. On a figuré la coupe de ces moulures, mais cela était inutile, à la condition que l'on connût la saillie d de l'arête qui porte ombre en avant du mur sur lequel se détache la moulure, et que l'on sût dessiner le profil de cette dernière. En effet, la connaissance de cette saillie d nous donne, pour commencer, la ligne d'ombre z,p ; à partir de p , nous faisons ressauter l'ombre suivant la ligne $pmnn_1r$ etc.... u , reproduisant le profil connu des moulures. Nous menons à cette ligne les rayons à 45° , soit tangents aux courbes soit frisans aux arêtes. Ainsi en n , nous aurons un rayon d'arête, donnant en n_1 une brisure. En r , nous aurons un rayon de tangence, donnant en r_1 une brisure, et ainsi de suite.... Par toutes les brisures n_1, r_1, u_1 , nous mènerons les parallèles aux génératrices des moulures et nous aurons non-seulement l'ombre portée par l'arête zz' , sur les moulures, mais les ombres portées par ces dernières les unes sur les autres.

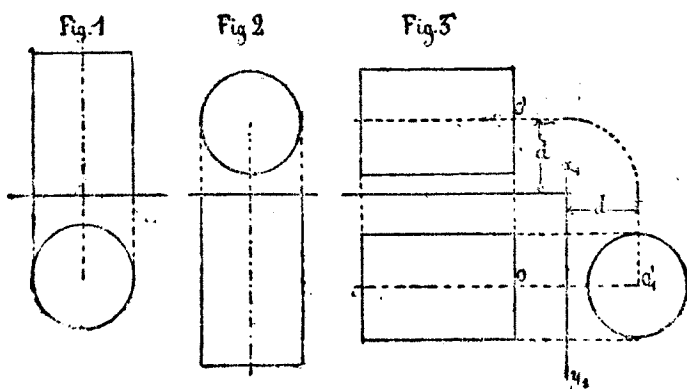
13. TRAVAIL DES ÉLÈVES.

Pour la prochaine leçon, les élèves achèveront la planche 6.

9^e LEÇON.OMBRES PORTÉES SUR LES CYLINDRES
EN RELIEF.

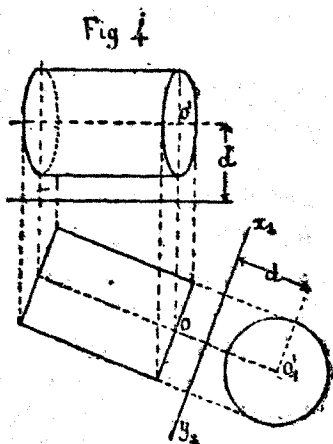
1. DIFFÉRENTES POSITIONS DE CYLINDRES.

Nous ne nous occuperons que des cylindres dont les génératrices seront perpendiculaires au plan horizontal (fig. 1). Dans le cas où elles seraient perpendiculaires au plan vertical (fig. 2), les problèmes se résoudraient évidemment de la même manière en appliquant aux projections horizontales ce que nous allons dire pour les projections verticales, et réciproquement. Si les

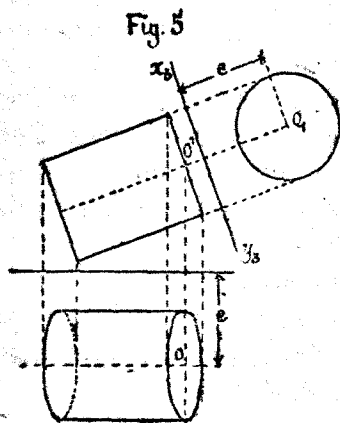


génératrices sont parallèles (fig. 3) à la ligne de terre ; en prenant pour nouveau plan vertical, x_1y_1 , un plan de profil, le cylindre lui sera perpendiculaire et nous rentrerons dans un des deux cas qui précèdent.

Si le cylindre a ses génératrices parallèles au plan horizontal (fig. 4), en prenant une nouvelle ligne de terre x_2y_2 perpendiculaire aux projections horizontales des génératrices, et prenant un nouveau plan vertical ayant x_2y_2 pour ligne de terre, notre cylindre sera perpendiculaire à ce nouveau plan vertical, et nous rentrerons dans le cas de la figure 2.



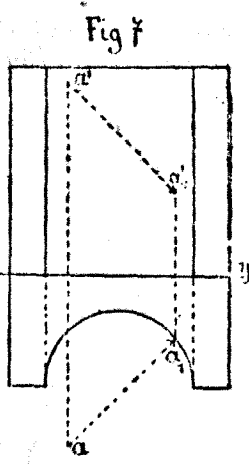
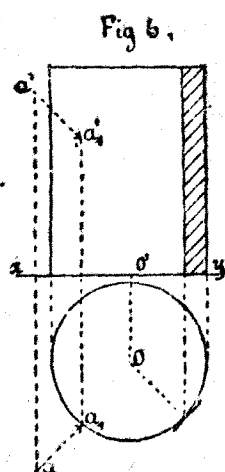
Si les génératrices sont parallèles au plan vertical (fig. 5), on prendra une nouvelle ligne de terre x_3y_3 , perpendiculaire aux projections verticales des génératrices, et un nouveau plan horizontal ayant x_3y_3 pour ligne de terre. On rentrera dans le cas de la figure 1.



Enfin, si le cylindre était tout à fait quelconque, le problème deviendrait plus compliqué. Nous ne nous en occuperons pas.

2. OMBRE PORTÉE PAR UN POINT (fig. 6).

Soit oo' le cercle de base d'un cylindre en relief. Soit a, a' un point situé en dehors.



Menons par le point aa' un rayon lumineux aa_1 — $a'a_1$, et cherchons son intersection avec le cylindre. On sait que, lorsqu'un cylindre est perpendiculaire au plan horizontal, il se projette horizontalement tout entier, suivant sa courbe de base. Le point a_1 est donc, en projection horizontale, le point où le

rayon lumineux perce le cylindre. Menons la ligne de rappel $a_1a'_1$ jusqu'au rayon lumineux en projection verticale, et nous

aurons en $a_1a'_1$ l'ombre portée par le point aa' sur le cylindre. Si ce cylindre est en creux (fig. 7), la solution est la même.

3. OMBRE PORTÉE PAR UNE DROITE PARALLÈLE AUX GÉNÉRATRICES (c'est-à-dire perpendiculaire au plan horizontal) (fig. 8).

Soit $a'b, a'b'$ une droite perpendiculaire au plan horizontal prenons un point quelconque, mm' , de cette droite, et cherchons, comme ci-dessus, son ombre portée $m_1m'_1$ sur le cylindre. On voit facilement que le point m'_1 est sur la génératrice $m'_1n'_1$ du cylindre, et qu'il en sera de même pour l'ombre portée par tout autre point de la droite $ab, a'b'$. Donc, l'ombre portée sur un cylindre par une droite parallèle à ses génératrices est elle-même une droite.

Nous pouvons dire encore : lorsqu'une droite est parallèle aux génératrices d'un cylindre, elle porte ombre, sur ce cylindre, parallèlement à elle-même, en vraie grandeur, et suivant une génératrice.

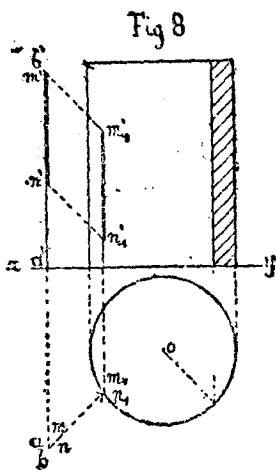
Nous venons de dire que la droite portait ombre en vraie grandeur. En effet, si nous prenons deux points $mm'—nn'$, et si nous en cherchons les ombres en m'_1 et n'_1 , on voit immédiatement que $m'_1n'_1$ est égale et parallèle à $m'n'$.

4. AUTRES POSITIONS DE DROITES, PORTANT OMBRE EN LIGNE DROITE SUR UN CYLINDRE (fig. 9).

Figurons, en perspective, un cylindre, un rayon lumineux R , le plan projetant Q de ce rayon lumineux, et une droite quelconque MN située dans ce plan projetant.

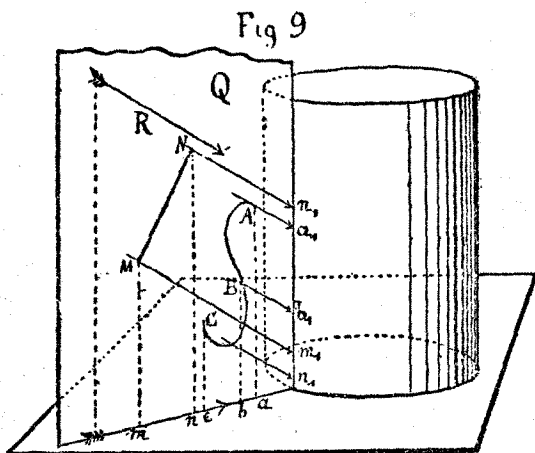
Le plan projetant Q , étant parallèle au cylindre, coupe ce dernier suivant une de ses génératrices m_1n_1 ; mais il est facile de voir que ce plan est précisément le plan d'ombre que la droite MN projette derrière elle; donc, la droite mm' est l'ombre portée sur le cylindre par la droite MN . Nous pouvons donc dire :

Lorsqu'une droite est dans un plan projetant horizontalement un rayon lumineux, elle porte ombre sur un cylindre vertical suivant une droite (non pas en vraie grandeur).



5. GÉNÉRALISATION. LIGNES COURBES PORTANT OMBRE EN LIGNE DROITE SUR UN CYLINDRE (fig. 9).

An lieu d'une ligne droite MN, située dans le plan Q, supposons que nous ayons une courbe quelconque ABC.



Son plan d'ombre sera toujours le plan Q : les rayons lumineux émanant de A,B,C, ne quitteront pas ce plan et viendront couper le cylindre en $a_1b_1c_1$ situés en ligne droite.

Nous pouvons donc dire: Lorsqu'une ligne plane, droite, brisée ou courbe, est dans un plan projetant horizontalement un rayon

lumineux, elle porte ombre, en ligne droite, sur un cylindre vertical.

6. REMARQUE.

Remarquons que ce qui caractérise la position du plan Q, c'est de contenir : 1° un rayon lumineux R ; 2° une droite Mm ou Nn, parallèle aux génératrices du cylindre. C'est, par conséquent, d'être à la fois parallèle au rayon lumineux et aux génératrices du cylindre; nous pourrons donc énoncer le théorème suivant, tout à fait général :

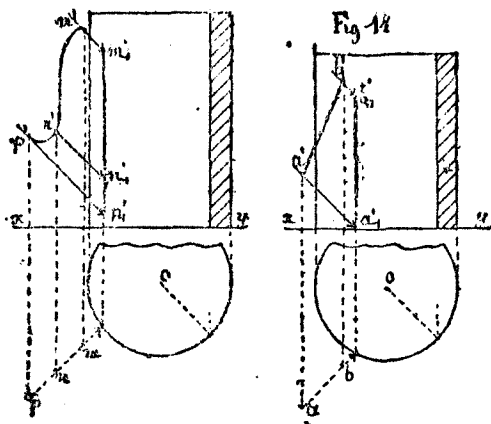
Théorème. Toute ligne plane, droite, brisée ou courbe, dont le plan est parallèle à la fois au rayon lumineux et aux génératrices d'un cylindre, porte ombre sur ce cylindre, suivant une ligne droite.

7. PROJECTIONS DES LIGNES QUI PORTENT OMBRE EN LIGNE DROITE (fig. 10 et 11).

En projections, tout plan projetant horizontalement un rayon lumineux, a pour trace horizontale une ligne à 45°, laquelle est la projection de tout point ou de toute ligne tracée dans ce plan. On reconnaîtra donc qu'une ligne droite ab , $a'b'$ ou une ligne courbe, mnp , $m'n'p'$, est dans les conditions ci dessus, lorsque, en projection horizontale, elle sera projetée à 45°.

Donc : toute ligne, droite, brisée ou courbe, qui, en projec-

Fig 10

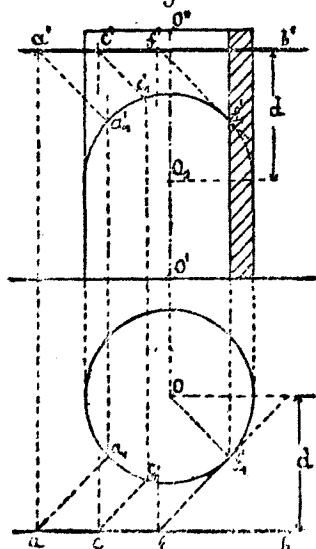


tion horizontale, et projetée suivant une ligne à 45° , porte ombre, en ligne droite, sur un cylindre vertical.

8. OMBRE PORTÉE PAR UNE DROITE PARALLÈLE A LA LIGNE DE TERRE (fig. 12).

Soit o, o' la base d'un cylindre, $ab, a'b'$ une droite parallèle à la ligne de terre, et supposée indéfinie.

Fig-12



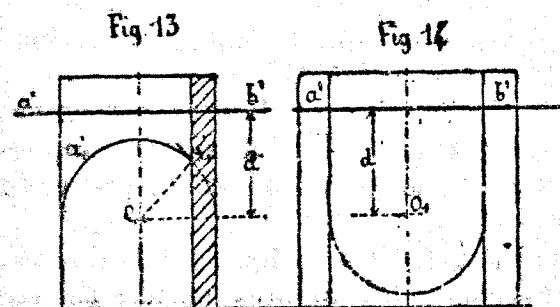
un cercle ; donc, l'ombre est un cercle en projection.

D'ailleurs, si on veut s'en assurer directement, on verra faci-

Cherchons l'ombre portée par plusieurs points $aa', cc'...$; nous les trouverons en $a'_1c'_1$, comme nous venons de l'indiquer, pour un point. Joignons les points $a'_1c'_1$ par une courbe, nous aurons en $a'_1c'_1f'_1$ l'ombre portée par la droite. Elle cesse au point de perte f'_1 , où elle rencontre l'ombre propre du cylindre. Je dis que cette courbe est un cercle. Nous le savons déjà, puisque nous avons démontré (8^e leçon), que l'ombre portée par une parallèle à la ligne de terre, sur des moulures verticales, reproduisait en projection verticale le profil de ces moulures. Ici, le profil est

lement que, à cause des lignes à 45° , qui existent en projection verticale et horizontale, l'une de ces projections est la reproduction, renversée, de l'autre.

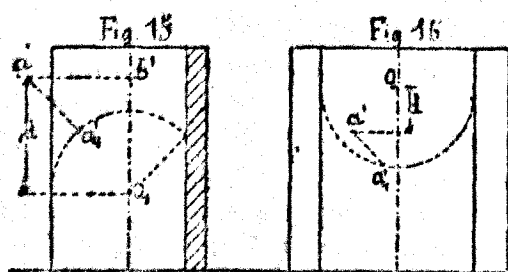
Ce que nous remarquerons surtout, c'est que, si l'on se donne la distance d (10^{mm} , 15^{mm} ou 20^{mm} ...) à laquelle la droite a, b est située en avant de l'axe du cylindre, et si l'on ne veut pas avoir recours au plan, on aura l'ombre a', c', f' , très-facilement, de la manière suivante : au-dessous de $a'b'$ nous prendrons (fig. 13 ou 14) sur l'axe du cylindre, un point o_1 situé à cette distance d ; de o_1 , comme centre, nous décrirons un demi-cercle (montant, si le cylindre est en saillie, et descendant s'il est en creux) ce demi-cercle aura pour rayon celui de la base du cylindre; il sera donc tangent à son contour apparent. Enfin, nous limite-



d'ombre trouvé, et, toujours, sans se servir du plan.

D. OMBRE PORTÉE PAR UN POINT (2° MÉTHODE) (sans avoir recours au plan, fig. 15 et 16).

La méthode précédente, pour trouver l'ombre d'une horizontale de front, quand on connaît sa distance à l'axe, va nous permettre de trouver l'ombre portée par un point, connaissant sa projection verticale a' , et sa distance d , en avant de l'axe du cylindre.



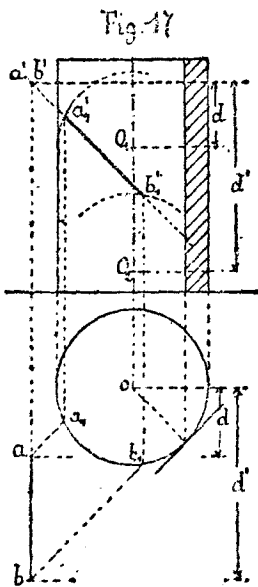
Je mène l'horizontale $a'b'$ jusqu'à l'axe; en b' , au-dessous de b , je prends sur l'axe un point o_1 situé à la distance connue d de o_1 , je décris un arc de cercle a'_1 tangent au cylindre et montant, je mène par a' le rayon à 45° jusqu'à la rencontre en a'_1 avec cet arc de cercle, et j'ai l'ombre cherchée.

En effet, l'arc $a'_1f'_1$ est l'ombre portée par la droite $a'b'$. Le point a' étant sur cette droite, son ombre sera sur l'ombre de cette droite, c'est-à-dire à la fois sur le rayon lumineux $a'a'_1$ et sur l'arc de cercle a'_1 .

Si le cylindre était creux, on mènerait l'arc en descendant. Il se pourrait, dans ce cas, que le point fût en arrière de l'axe et non pas en avant ; dans ce cas, on porterait o_1 *au-dessus* et non pas *au-dessous* (fig. 16).

10. OMBRE PORTÉE PAR UNE DROITE PERPENDICULAIRE AU PLAN VERTICAL (fig. 17).

Cette droite se projette, tout entière et verticalement, suivant un point aa' . Nous avons démontré (7^e leçon), que son ombre portée sur toute espèce de surface, cylindre, cône, sphère, donnait en projection verticale une ligne à 45°.



Si la droite n'est pas limitée, son ombre ne le sera pas non plus. Elle cessera, cependant, à sa rencontre avec l'ombre propre du cylindre.

Si elle est limitée à deux points aa' , bb' , on cherchera les ombres portées par ces points par l'une des deux méthodes données ci-dessus, soit en se servant du plan, soit, si l'on en connaît les distances à l'axe, sans y avoir recours.

11. APPLICATION (Planche 7, figure 1.) (Texte, fig. 18).

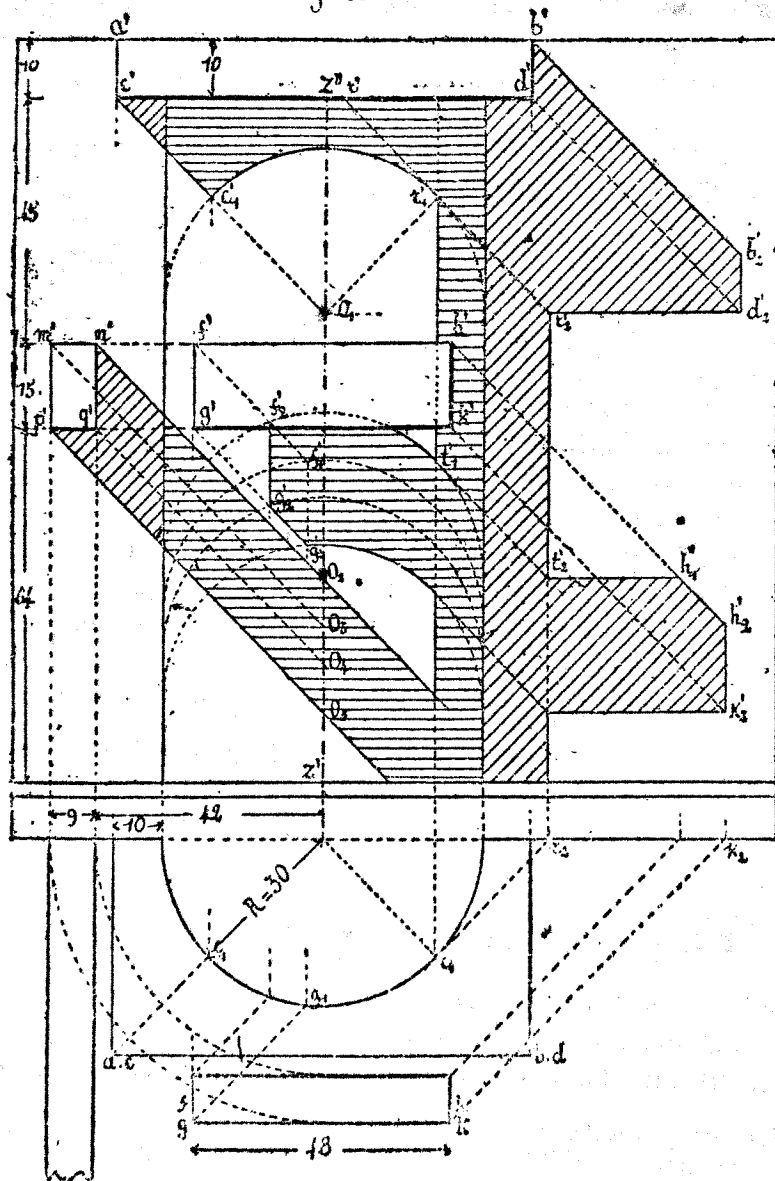
Nous avons un demi-cylindre vertical, saillie, supposé appliqué sur un mur vertical. Il est couronné par une dalle carrée, analogue au tailloir du chapiteau dorique. $abcd$, $a'b'c'd'$.

En avant se trouve un petit parallélépipède rectangle, analogue à une barre prismatique rectangulaire $fghk$, $f'g'h'k'$. Et sur le côté, à gauche, une barre de même section, située à la même hauteur et à la même distance de l'axe, mais perpendiculaire au plan vertical et supposée indéfinie ; cette barre est vue en coupe $m'n'p'q'$... On demande : 1^o de trouver les ombres portées par le tailloir et les deux barres sur le cylindre ; 2^o sur le mur du fond, ainsi que l'ombre propre du cylindre et son ombre portée sur ce mur du fond.

12. OMBRE DU TAILLOIR SUR LE CYLINDRE ET SUR LE MUR.

Le tailloir est carré. Il déborde donc la colonne autant à droite et à gauche qu'en avant.

Fig 18



Prenons l'arête $c'd'$ parallèle à la ligne de terre. Son ombre portée sur le cylindre sera un arc de cercle obtenu en prenant un centre O_1 sur l'axe et situé au-dessous de $c'd'$ d'une quantité

égale à la saillie de $c'd'$ en avant de l'axe ; mais, cette saillie, étant la même à gauche et à droite, si nous menons la ligne à 45° $c'O_1$, on aura $c'z'' = z''O_1$ et le point O_1 sera le centre demandé. Nous tracerons l'arc de cercle $c'_1r'_1$ tangent au contour du cylindre, c'est-à-dire en prenant pour rayon le rayon du cylindre.

En r'_1 nous mènerons le rayon à 45° , tangent, ce qui nous donnera l'ombre propre du cylindre. (On aurait pu l'avoir sur le plan en menant le rayon à 45° r_1r_2 , tangent à la base du cylindre.

Le point c' , extrémité de gauche de l'arête, porte ombre sur le cercle trouvé, en c'_1 .

Enfin, l'arête c' , perpendiculaire au plan vertical porte ombre à 45° , suivant $c'_1c'_1$, aussi bien sur le cylindre que sur le mur du fond.

Nous avons pris en $r_2r'_2$ l'ombre portée par le cylindre sur ce mur ; le point de perte r' appartenant à l'ombre propre du cylindre, porte ombre en r'_2 sur le mur. L'ombre du tailloir *ressaute* donc de r' sur le cylindre en r'_2 sur le mur. Ce qui reste en $r'd'$ de l'arête, porte ombre sur le mur en vraie grandeur et parallèlement à elle-même, en $r'_2d'_2$. L'arête verticale $d'b'$ donne l'ombre $d'_2b'_2$, et la droite perpendiculaire au plan vertical, projetée tout entière en b' , donne la ligne à 45° $b'b'_2$.

Remarque. $r'_2d'_2$ est sur la même horizontale que le point o_1 .

13. OMBRE DE LA BARRE DEBOUT (1).

Les arêtes extrêmes, n' et p' sont celles qui portent ombre suivant des lignes à 45° aussi bien sur le mur que sur le cylindre. Cette ombre vient se perdre dans l'ombre propre du cylindre.

14. OMBRE DE LA BARRE FRONTO-HORIZONTALE.

Considérons les deux arêtes $f'h'$ et $g'k'$, qui sont en avant. Elles porteront ombre suivant des cercles dont les centres se trouveront sur l'axe en o_3 et o_5 comme nous l'avons indiqué.

(1) On dit qu'une droite est *debout* quand elle est perpendiculaire au plan vertical. — *Verticale*, quand elle est perpendiculaire au plan horizontal. — *De front*, quand elle est simplement parallèle au plan vertical. — *De niveau* ou *horizontale*, quand elle est parallèle au plan horizontal, et *fronto-horizontale*, quand elle est parallèle à la ligne de terre.

On prendra, sur le plan, la saillie des droites fh et gk , en avant de l'axe ; et on placera o_3 au-dessous de $f'h'$ et o_5 au-dessous de $g'k'$, de toute la saillie ainsi trouvée.

Remarque. La barre debout, $m'n/p'q'$, a été prise à la même distance de l'axe que celle qui nous occupe ; d'ailleurs, elle est à la même hauteur et elle a la même épaisseur ; par conséquent, les points o_3 et o_5 seraient donnés en menant par m' et p' les lignes à 45° jusqu'à la rencontre avec l'axe.

On tracera de ces points o_3 et o_5 , comme centres, les arcs de cercle f'_1 et g'_1 .

Par f' et g' on mènera les rayons à 45° jusqu'à la rencontre avec ces arcs, et on aura les ombres des deux extrémités f' et g' (le point f' sera noyé dans l'ombre totale).

On cherchera de même les ombres des deux arêtes postérieures de la barre ; on aura deux nouveaux centres o_2 et o_4 obtenus, soit par la connaissance des saillies de ces arêtes en avant de l'axe, soit en prenant o_3o_2 et o_5o_4 , égaux à l'épaisseur de la barre, c'est-à-dire en relevant les centres précédents de toute cette épaisseur, soit en menant les lignes à 45° par les points n' et q' de la barre debout.

On aura ainsi les arcs $f'_2g'_2$, limités à gauche en f'_2 et g'_2 et à droite se perdant dans l'ombre propre du cylindre.

A gauche, l'ombre totale de la barre sera limitée :

1° En $f'_2g'_2$ par une portion de génératrice du cylindre (c'est l'ombre de la droite verticale $f'g'$ qui, étant parallèle au cylindre, y porte ombre en ligne droite et en vraie grandeur) ;

2° En $g'_2g'_1$ par une ligne à 45° (c'est l'ombre de la droite debout g' , laquelle, étant perpendiculaire au plan vertical, porte ombre à 45°) ;

3° Aux deux arcs de cercles extrêmes f'_2 et g'_1 . A droite, elle vient se perdre dans l'ombre propre du cylindre.

L'ombre portée par cette même barre sur le mur se tracera sans difficulté. Nous avons déjà traité, plusieurs fois, un problème analogue. On remarquera seulement que les points de *perte* tels que t'_1 correspondent, à 45° , aux points de *brisure* tels que t'_2 .

15. OMBRE D'UN CERCLE SUR UN CYLINDRE.

La fig. 2 de la planche 7 (texte, fig. 24), est une application des ombres portées sur un cylindre par des cercles dans différentes positions.

Nous allons les étudier séparément ; après quoi, nous n'aurons plus que quelques mots à ajouter pour faire comprendre l'épur d'ensemble.

1^o Le cylindre est couronné par un cylindre plus grand et concentrique, formant comme le listel de l'astragale d'une colonne. L'ombre correspondante sera :

PROBLÈME I, *ombre portée sur un cylindre par un cercle concentrique à son cercle de base.*

2^o Nous avons en avant un cylindre plus petit, formant comme un disque, parallèle au plan vertical. Nous chercherons les ombres portées par ses deux bases, ce qui donnera :

PROBLÈME II. — *Ombre portée sur un cylindre vertical, par un cercle parallèle au plan vertical.*

16. OMBRE PORTÉE SUR UN CYLINDRE PAR UN CERCLE CONCENTRIQUE À SA BASE (fig. 19).

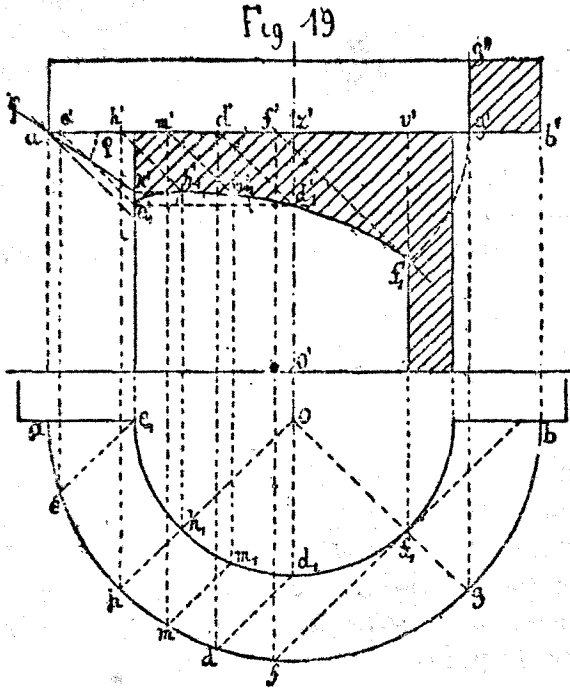
Soit oo' le cercle de base du cylindre, et soit $ab, a'b'$ un cercle concentrique à cette base, et plus grand qu'elle. Cherchons l'ombre portée par un point quelconque m, m' de ce cercle. Nous menons le rayon lumineux $mm_1, m'm'_1$, et le point m, m' , où il perce le cylindre est l'ombre du point m . On cherchera de même les ombres d'autres points, et, en les joignant par une courbe continue, on aura l'ombre cherchée. On conçoit qu'il y a certains points de cette ombre plus importants à connaître que d'autres.

1^o Détermination du point de perte f_1 .

En projection horizontale, ce point se projette en f_1 au pied de la génératrice d'ombre propre. Mais le rayon qui aboutit en f_1 vient du point f du cercle. Cherchons la projection verticale f' du point f du cercle ; pour cela, menons la ligne de rappel ff'' . Enfin, par f' , menons le rayon lumineux $f'f''$, jusqu'à f'_1 où il rencontre la ligne d'ombre propre, et nous aurons le point de perte.

Remarque 1. Cherchons la tangente à la courbe d'ombre au point de perte f, f'_1 . On voit que la courbe d'ombre portée est, en réalité, l'intersection de deux cylindres : 1^o le cylindre donné ; 2^o le cylindre d'ombre que projette derrière lui le cercle $ab, a'b'$. Sa tangente devra se trouver à la fois dans les plans tangents à ces deux cylindres, puisque, par définition, le plan

angent à une surface, en un point, est le plan qui contient toutes les tangentes à toutes les courbes qui passent par ce point sur la surface, et que la courbe d'ombre est à la fois sur les deux cylindres. Mais, en $f_1 f'_1$, le rayon lumineux $f' f'_1$, est dans le cylindre d'ombre, comme étant une de ses génératrices. Il est



donc aussi dans le plan tangent en $f_1 f'_1$ à ce cylindre; de plus, ce même rayon est tangent au cylindre donné, puisque $f_1 f'_1$ est un point de l'ombre propre de ce dernier; donc : le rayon lumineux étant à la fois dans les deux plans tangents aux deux cylindres, est la tangente à la courbe d'ombre portée, au point de perte.

17. THÉORÈME SUR LA TANGENTE AU POINT DE PERTE.

Au point de perte de l'ombre portée dans l'ombre propre, la tangente à la courbe est le rayon lumineux.

Ce théorème est général et s'applique à l'ombre portée par une surface quelconque sur une surface quelconque. En effet (fig. 20), soit en perspective un corps quelconque A dont l'ombre propre est la courbe mn.

Soit en pq l'ombre portée sur lui par un autre corps B, et soit f_1 le point de perte.

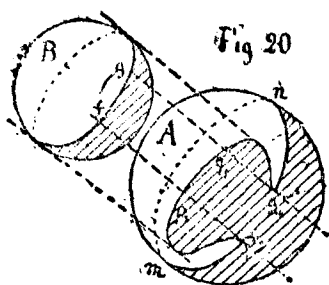


Fig 20

La ligne pq est l'intersection du cylindre d'ombre de B avec la surface du corps A.

En f_1 , le rayon lumineux étant une génératrice de ce cylindre d'ombre, appartient à son plan tangent.

En f_1 , également, le rayon lumineux est tangent à la surface A, puisque f_1 est un point de l'ombre

propre de A. Donc, ce rayon lumineux étant à la fois tangent au cylindre d'ombre et à la surface A, est aussi tangent à leur ligne d'intersection, c'est-à-dire à la courbe d'ombre portée p_1, f_1, q_1 , C. Q. F. D.

18. REMARQUE 2°.

Si le cercle $a'b'$ est lui-même la base d'un cylindre dont la ligne d'ombre propre, soit $g'g''$, facile à trouver, soit par les échelles, soit en se servant du plan, soit en prenant les $3/10$ du rayon, nous démontrerons plus tard que si, de z'' comme centre avec $z''g'$ pour rayon, nous décrivons un arc de cercle, nous aurons, à la rencontre avec la ligne d'ombre propre du cylindre inférieur, le point de perte cherché.

Nous utiliserons très-souvent cette construction, qui permet de ne pas se servir du plan.

19. POINT LE PLUS HAUT DE LA COURBE.

On voit que tout est symétrique par rapport au plan de symétrie à 45° Oh. Donc, le point le plus haut (voir 3^e leçon), sera dans ce plan de symétrie.

En projection horizontale, ce sera le point h_1 . Le rayon qui le donne part du point h, h' du cercle $ab, a'b'$, par h' ; je mène le rayon à 45° jusqu'à la rencontre avec la ligne de rappel du point h_1 et j'obtiens en h'_1 le point le plus haut. — La tangente y est horizontale.

On peut l'obtenir autrement par une méthode qui dispense de se servir du plan et qui rentre dans la méthode des plans coupants.

Faisons tourner le plan Oh jusqu'à ce qu'il soit devenu parallèle au plan vertical. Le point hh' est venu en a, a' , la géné-

ratrice $h_1h'_1$ est devenue la génératrice de contour apparent du cylindre inférieur. Le rayon lumineux est devenu à l'angle φ .

Par a' , je mène avec l'équerre spéciale, le rayon φ . Il coupe le contour apparent en un point k' qu'il ne me reste plus ensuite qu'à ramener en h'_1 sur la génératrice $h_1h'_1$ (à 45°), du petit cylindre.

Ce que je ferai, soit en prenant $kk'_1 = 3/10$ du rayon, soit en prenant la largeur kh'_1 égale à l'épaisseur de l'ombre propre du petit cylindre.

20. POINT SUR L'AXE ET SUR LE CONTOUR APPARENT DE GAUCHE.

Horizontalement le point sur l'axe se projette en d_1 . Il est l'ombre du point dd' du cercle. Je mène le rayon lumineux qui passe par d' et j'obtiens en d'_1 le point projeté sur l'axe.

Le point sur le contour apparent se projette horizontalement en e_1 . Il est l'ombre du point e , relevé verticalement en e' ; par e' on mène la ligne à 45° et on a le point e'_1 sur le contour apparent.

Remarques. 1° Au point e'_1 la courbe est tangente au contour apparent;

2° Le point e_1 ne s'obtient pas en menant par a' une ligne à 45° jusqu'au contour apparent. Il est un peu plus haut que le point que l'on obtiendrait ainsi ;

3° A cause de la symétrie des points e_1 et d_1 par rapport au plan Oh ces deux points e'_1 et d'_1 sont à la même hauteur. Quand on connaîtra le premier, on aura donc facilement le second, à l'aide d'une horizontale, et inversement.

21. RÉSUMÉ (fig. 21).

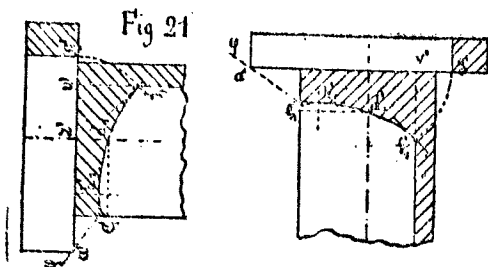
Nous rencontrerons cette ombre tellement souvent, que nous allons résumer la manière de la tracer sans se servir du plan et que nous lui donnerons un nom, nous l'appellerons l'*ombre du listel*. Il faut opérer ainsi :

1° Déterminer en v' et g' les lignes d'ombres propres des deux cylindres ;

2° De z'' comme centre avec $z''g'$ pour rayon, décrire un arc de cercle jusqu'à la rencontre avec l'ombre propre v' — on aura le point de perte f'_1 . La tangente est la ligne à 45° .

3° Par a' , mener avec l'équerre spéciale le rayon φ . Prendre

l'intersection k' , avec le contour apparent du petit cylindre ; ramener k' en k'_1 , soit en prenant les $3/10$ du rayon, soit en prenant $kh'_1 = v'g'$. En ce point la tangente est horizontale.



Tracer la courbe entre k'_1 et f'_1 , en se guidant sur les tangentes ce qui suffit le plus souvent.

4° Prendre le point d'_1 où la courbe ainsi tracée coupe l'axe, ramener le point en e'_1 sur le contour apparent par une perpendiculaire à l'axe. En e'_1 la courbe est tangente au contour apparent.

Les élèves devront savoir faire très-couramment le tracé de l'ombre du listel.

22. OMBRE PORTÉE SUR UN CYLINDRE PAR UN CERCLE PARALLÈLE AU PLAN VERTICAL (fig. 22).

Soit mn , $m'n'$ d'un cercle de front, placé devant un cylindre. Pour avoir l'ombre, nous pourrions prendre, 5, 10, 15... points au hasard sur le cercle, chercher leurs points d'ombres portées, et joindre ces points d'ombre, par une ligne continue. Nous préférons choisir les points les plus importants, et chercher une solution qui permette de se passer du plan.

A cet effet, menons le carré $a'b'c'd'$, qui serait tangent au cercle, aux points $m'n'p'q'$.

Nous savons trouver l'ombre portée par ce carré. Les deux côtés $a'b'$, et $c'd'$ donneront comme ombres des arcs de cercle dont les centres s'obtiendront en O_1 et O_2 , sur l'axe, à une distance au-dessous de $a'b'$ et de $c'd'$ égale à la saillie, connue par le plan ou autrement, du cercle en avant de l'axe.

On tracera ainsi les deux demi-cercles $O_1a'b'_1$ et $O_2c'd'_1$, on tracera aussi le demi-cercle $O_3m'n'_1$, qui serait l'ombre portée par la droite $m'n'$ (fig. 22).

Par m' et n' , menons les rayons à 45° , jusqu'au cercle du milieu O_3 , nous aurons en $m'_1n'_1$, les ombres des points m' et n' .

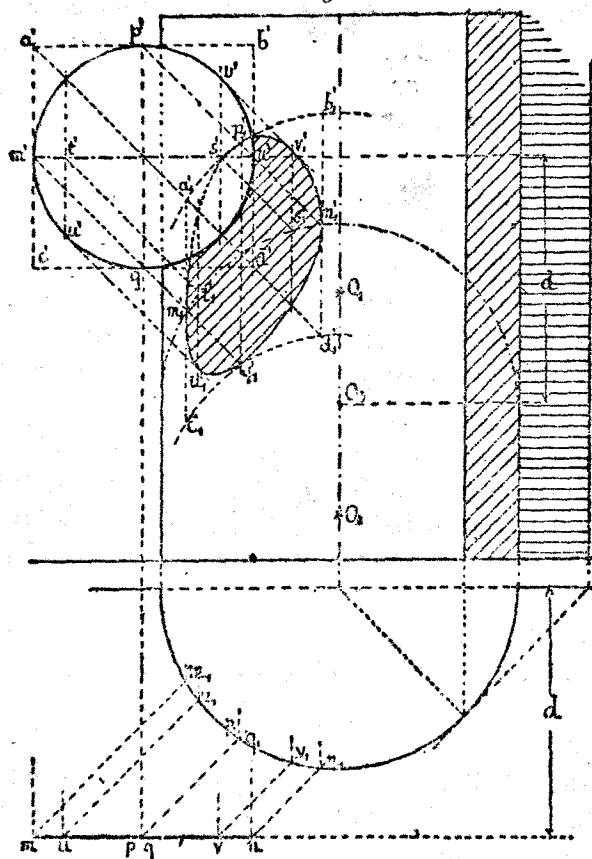
De même, nous aurons en p'_1 et q'_1 sur les cercles O_1 et O_2 les ombres des points p' et q' . L'ombre du carré $a'b'c'd'$ est le quadrilatère recto-curviligne $a'_1b'_1c'_1d'_1$.

En m'_1 et n'_1 la courbe d'ombre est tangente aux droites $a'_1c'_1$

et $b'_1d'_1$, et en p'_1 et q'_1 , elle est tangente aux cercles O_1 et O_2 , puisque, dans l'espace, le cercle dont elle est l'ombre est tangent aux droites dont ces différentes lignes sont les ombres.

Prenons les points v' et u' qui sont sur la diagonale $c'b'$, et cherchons les ombres de ces points.

Fig. 22



Menons les verticales $v's'$ et $u't'$, jusqu'à la rencontre avec la ligne $m'n'$. Le point s' étant sur $m'n'$ porte ombre en s'_1 sur le cercle $a'_1b'_1$, la verticale $v's'$ porte ombre parallèlement à elle-même, en $v'_1s'_1$ et le point v' porte ombre en v'_1 .

La construction est analogue pour le point u' : il porte ombre en u'_1 .

Aux points u'_1 et v'_1 , les tangentes sont à 45° .

En effet, supposons solidifié le cylindre d'ombre du cercle $n'n'p'q'$, ses génératrices seraient des lignes à 45° , et son contour apparent vertical serait précisément formé par les deux

tangentes à 45° , v'_1 , et s'_1 . Or, on sait que toute ligne tracée sur une surface est tangente à son contour apparent; donc, la courbe d'ombre portée $m'_1n'_1p'_1q'_1$, qui appartient à ce cylindre d'ombre, doit être tangente à son contour apparent, c'est-à-dire aux lignes à 45° , aux points v'_1 et s'_1 où elle le rencontre.

Cette propriété des lignes d'ombres portées est générale; on peut l'énoncer ainsi : *Lorsqu'une surface quelconque B (fig. 20) porte ombre sur une autre surface A, la courbe d'ombre propre de la surface B et la courbe d'ombre portée sur la surface A, sont toutes deux comprises entre deux tangentes communes, à 45° .*

Revenons à l'ombre du cercle $m'n'p'q'$. Nous avons trouvé 6 points et les tangentes en ces points; cela suffira largement pour tracer la courbe avec exactitude.

Remarque 1. Dans le cas que nous venons de choisir, le cercle portait ombre en entier sur le cylindre. Il pourrait se faire qu'il en fût autrement. Nous allons traiter ce 2^e cas, qui se présentera aussi dans la fig. 2, de la planche 7.

Remarque 2. Nous venons de faire l'épure, sans nous servir de la projection horizontale; nous ne lui avons emprunté que la distance d , à laquelle le cercle se trouvait en avant de l'axe; nous en avons déduit le cercle dont le centre est en O_3 , et le tracé s'est achevé à l'aide de ce cercle.

Nous allons, au contraire, traiter le 2^e cas, en nous servant du plan. De cette façon, les élèves seront au courant des deux méthodes.

23. OMBRE PORTÉE SUR UN CYLINDRE VERTICAL

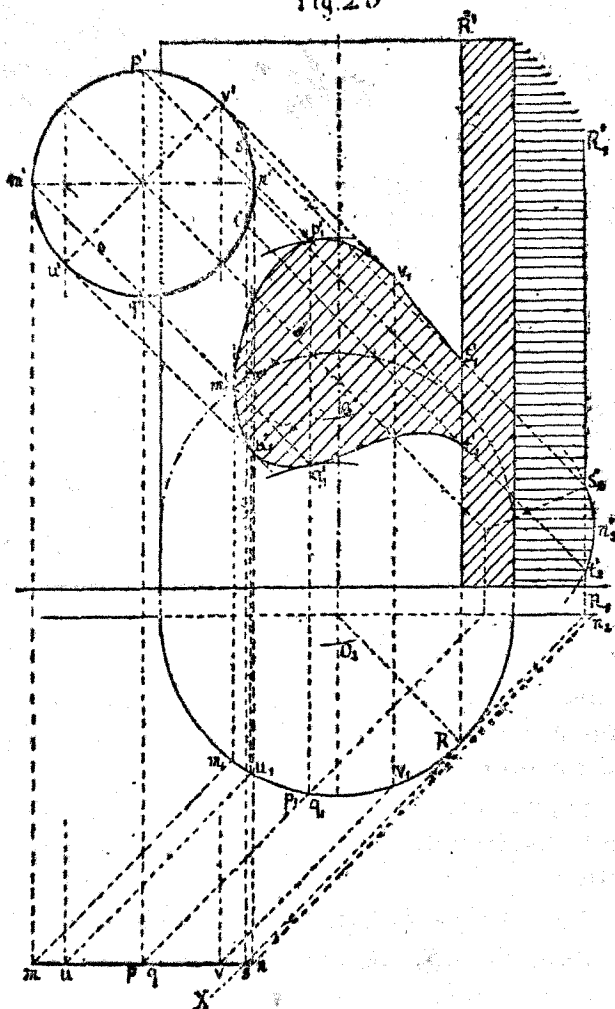
par un cercle de front. (2^e cas. — Ombre incomplète) fig. 23.

Soit encore $m'n'p'q'$ le cercle. On s'assure qu'une partie de l'ombre tombera en dehors du cylindre, en remarquant, sur le plan, que la tangente à 45° , RX coupe en s la projection mn du cercle, s est la projection des deux points s' et t' , du cercle. Ces deux points portent ombre en s'_1 et t'_1 sur la ligne RR' d'ombre propre du cylindre. S'_1 et t'_1 , sont deux points de perte; d'après le théorème général, la tangente est le rayon lumineux à 45° .

Toute la portion $s'n't'$ du cercle porte ombre en dehors du cylindre. S'il existe, en arrière, un mur sur lequel la ligne RR' , porte ombre en R_1R_1 , les deux points s'_1 et t'_1 , y porteront ombre

en s_2 et t_2 , qui seront deux points de brisure, et nous aurons en $s_2 n_2 t_2$. l'ombre en vraie grandeur, de la portion $s n t$ du cercle.

Fig. 23



Le reste de l'épure s'achèverait comme dans le cas précédent.

On circonscrirait le carré $a'b'c'd'$; et on procéderait comme tout à l'heure, sans avoir recours au plan. Si l'on veut, au contraire s'en servir; on cherchera directement en $m_1m'_1 - p_1p'_1 - q_1q'_1$ — les ombres des points m', p' , et q' , par la méthode qui donne l'ombre d'un point.

En m' , la tangente est verticale.

En p'_1 , pour avoir la tangente, il suffira avec un rayon égal à celui du cylindre, de tracer de p'_1 , comme centre, un petit arc

de cercle jusqu'en O_1 , rencontre avec l'axe, puis de O_1 , comme nouveau centre, de retracer un nouvel arc de cercle passant par p'_1 . La courbe devra lui être tangente. De même, pour le point q'_1 , on déterminera un centre o_2 , puis l'arc tangent en q' .

Enfin, menant les tangentes à 45° , au cercle, en v' et en u' , on prendra les projections horizontales v et u de ces deux points; on en cherchera directement l'ombre en v'_1 et u'_1 . En ces points, les tangentes sont à 45° .

Remarque. Voici quatre points v'_1 et u'_1 , s'_1 et t'_1 pour lesquels les tangentes sont à 45° . Il eût pu se faire, si le plan tangent R au cylindre eût laissé à sa droite le point v , que le point $v_1v'_1$ n'existât pas.

24. EXPLICATION DE LA FIGURE 2 DE LA PLANCHE 7.

(Texte, fig. 24).

On reconnaîtra (fig. 2, planche 7) trois cercles dans les positions que nous venons d'étudier.

L'épure se fera donc sans difficulté.

On remarquera seulement que, dans l'ombre du disque $m'.n'.p'.q'.$, les points v'_1 et v'_2 , u'_1 et u'_2 sont réunis par les lignes à 45° auxquelles sont tangentes les deux courbes d'ombre en ces points. Les lignes $v'_1v'_2$ et $u'_1u'_2$ sont les ombres portées sur le cylindre vertical par les lignes d'ombre propre du petit cylindre qui forme le disque.

En outre, l'épure est compliquée de l'ombre portée sur le mur du fond par la portion du listel supérieur qui ne porte pas ombre sur le cylindre.

Or, le listel est limité en haut et en bas par deux demi-cercles horizontaux dont nous savons trouver (7^e leçon) les ombres portées sur un mur vertical.

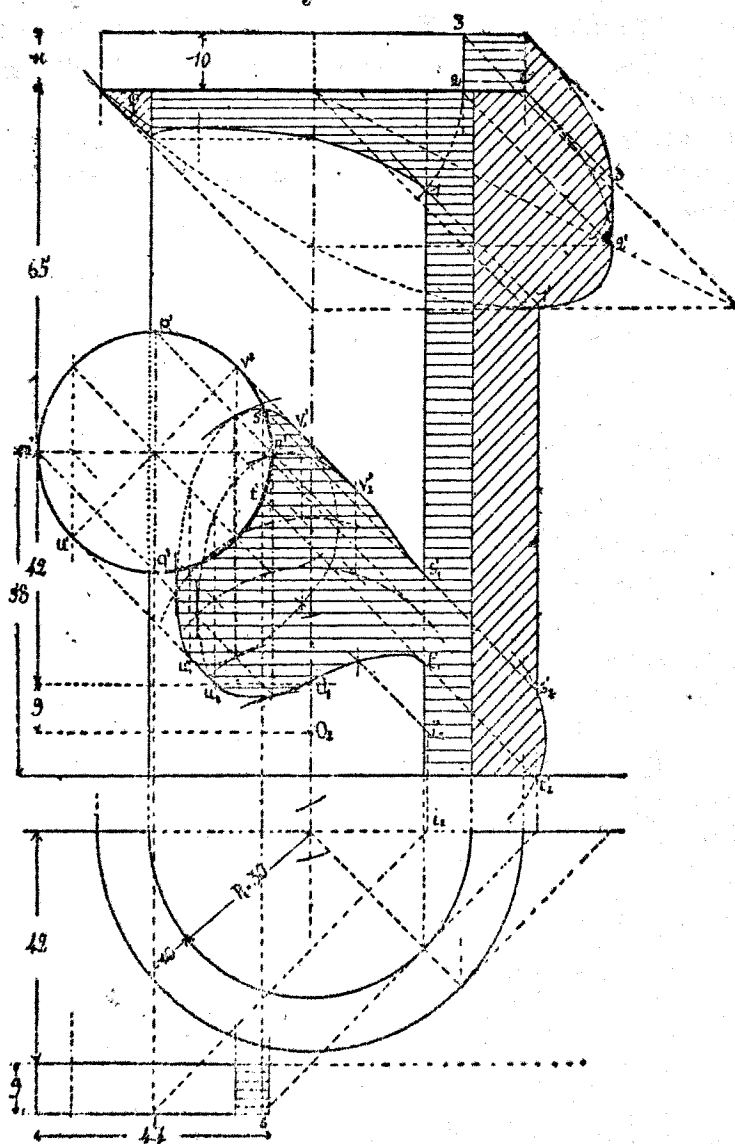
On reconnaîtra sur l'épure le parallélogramme connu dans lequel doit s'inscrire l'ellipse d'ombre. Nous n'insistons pas sur ce tracé.

Nous aurons deux ellipses réunies par leur tangente commune verticale, qui sera l'ombre portée sur le mur par la génératrice d'ombre propre du cylindre aplati qui constitue le listel.

25. TRAVAIL DES ÉLÈVES POUR LA PROCHAINE LEÇON.

Les élèves devront avoir terminé à l'encre les traits des contours de *toutes* les figures de la planche 7 (même de celles qui

Fig 24



n'ont pas été expliquées), ainsi que les écritures et les cases destinées aux échantillons des teintes.

Seront faites au crayon seulement, mais très-nettes et débar-

rassées à la gomme élastique de tous les traits erronés, les lignes de construction se rapportant aux figures 1 et 2. Enfin, les lignes définitives qui délimitent le contour des ombres sur les figures 1 et 2, *seulement*, devront être faites à l'encre très-pâle, afin qu'au moment de faire le lavis on puisse donner un coup de gomme qui effacera les lignes au crayon, sans les enlever.

Pour les figures 3 et 4, aucune construction ne sera faite ; il n'y aura de terminé que les contours de leurs surfaces (plan et élévation).

Dans la prochaine leçon, on expliquera le tracé des ombres des figures 3 et 4, et la manière de faire le lavis de toute la planche 7.

10^e LEÇON.

OMBRES PORTÉES SUR LES CYLINDRES EN CREUX.

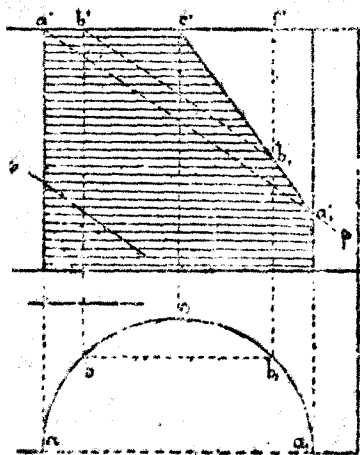
1. OMBRE PORTÉE SUR UN CYLINDRE PAR SON CERCLE DE BASE.

Ombre du couvercle et ombre du pont.

Lorsque le cercle qui porte ombre sur un cylindre est précisément son cercle de base, dans ce cas, l'ombre portée, au lieu d'être gauche, est plane. Et, comme toute section plane d'un cylindre est une ellipse, l'ombre, dans ce cas, est une ellipse. Nous allons, pour commencer, faire l'épure dans des conditions qui nous permettront de démontrer ce fait.

Supposons (fig. 1) que nous ayons un demi-cylindre en coupe, éclairé par des rayons rendus, par rotation, parallèles au plan vertical. Soit ϕ un de ces rayons (il est à l'angle ϕ).

Fig. 1.



Le point aa' porte ombre en $a_1a'_1$.

Un second point $b.b'$ donnera, comme ombre, le point $b_1b'_1$, le point cc' où le rayon est tangent à la base du cylindre, porte ombre sur lui-même.

On voit immédiatement que si l'on joint $c'a'_1$ par une droite, le point b'_1 et tous les points de l'ombre tomberont sur cette droite; par conséquent, l'ombre portée est une courbe qui, dans les conditions actuelles, se projette verticalement tout entière en ligne droite. Ce n'est donc autre chose que l'intersection du cylindre par un plan perpendiculaire

au plan vertical, et qui aurait $c'a'$, pour trace verticale. C. Q. F. D.

On remarquera que l'ombre commence au point cc' de la base auquel aboutirait la ligne d'ombre propre du cylindre ; c'est-à-dire au point de la base pour lequel le rayon lumineux serait précisément tangent au cylindre.

Ce théorème est général. Nous allons l'énoncer sans le démontrer.

2. THÉORÈME.

Lorsque, dans une surface du second degré (on désigne ainsi, 1° les cylindres et les cônes droits ou obliques, à base circulaire, elliptique, parabolique ou hyperbolique ; 2° les surfaces de révolution du genre sphère, ellipsoïde, hyperboloïde ou paraboléoloïde ; 3° les ellipsoïdes, les hyperboloïdes ou paraboléoloïdes quelconques), on pratique une ouverture plane, c'est-à-dire faite en coupant la surface par un plan ; l'ombre portée sur cette même surface, par cette ouverture, est aussi une courbe plane.

3. OMBRE PORTÉE SUR UN CYLINDRE PAR SA BASE PLEINE.

(Ombre du couvercle.)

(Cas général, figure 2.)

Reprenons maintenant le cylindre (fig. 2) éclairé par les rayons à 45° , et imaginons comme le fait comprendre, en perspective, la fig. 3 que ce demi-cylindre, en coupe, soit surmonté par son cercle de base supposé plein et en entier.

Nous savons que l'ombre est plane et que, par conséquent c'est une ellipse. Nous allons en chercher deux diamètres conjugués. Il suffira, pour cela, de prendre l'ombre portée par deux diamètres à angle droit du cercle.

Choisissons le diamètre de front ba_1 et le diamètre debout (ou perpendiculaire au plan vertical) ab_1 .

a porte ombre en $a_1a'_1$ et b en $b_1b'_1$; par suite, les deux droites a'_1a_1 et $a'b'_1$ sont deux diamètres conjugués.

En a'_1 , la tangente est verticale pour plusieurs raisons que voici :

1° a'_1 étant sur le contour apparent, la courbe est tangente à ce contour.

Fig. 2.

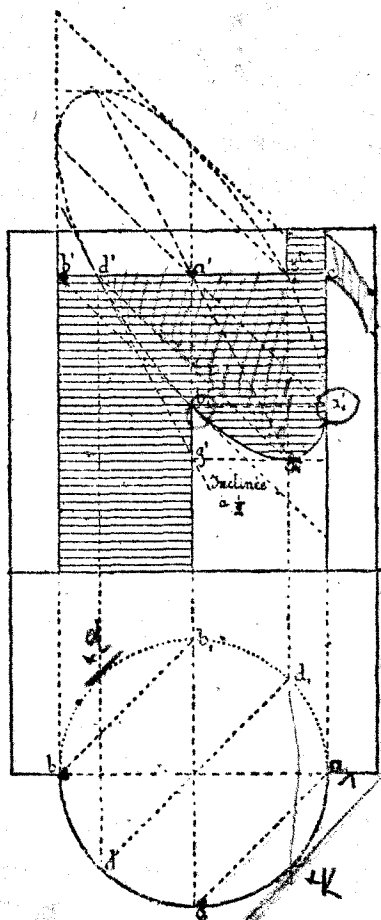
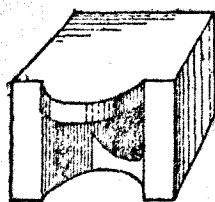


Fig. 3.



2° En a'_1 la tangente est parallèle au diamètre ab'_1 , lequel est vertical. Remarquons enfin, qu'en b'_1 la tangente est à 45° , car elle, doit être parallèle à $a'a'_1$.

Point le plus bas.

A cause de la symétrie, ce sera le point situé dans le méridien de symétrie à $45^\circ dd_1$.

Je cherche en d, d' , l'ombre du point d, d' et j'ai le point le plus bas d'_1 . En ce point, la tangente est horizontale.

Points de départ ou d'origine.

Si nous prenons les points d' et k' de la base où le rayon

lumineux serait tangent au cylindre, ce seront les points de départ, nous l'avons démontré, figure 1. L'ellipse, ou plutôt la demi-ellipse d'ombre passerait par les points $d' b'$, $d'_1 a'_1 k'$. — La portion $a'_1 k'$ n'existe pas, car elle le trouverait sur la moitié enlevée du cylindre.

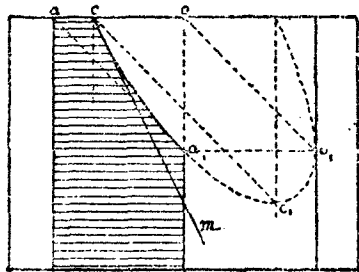
En d' , point de départ, la tangente est parallèle à $a'd'_1$. En effet, $a'd'$ est le diamètre conjugué de $a'd'_1$, puisque, en d'_1 , la tangente est horizontale, et par conséquent parallèle à $a'd'$. Donc, réciproquement, en d' , la tangente doit être parallèle au diamètre $a'd'_1$.

On remarquera que la ligne à 45° , $d'd'_1$, donne l'égalité $d'k'_1 = k'd'_1$, d'un autre côté, $a'k'$ est la moitié de $d'k'_1$; donc, dans le triangle $a'k'd'_1$, le côté $a'k'$ est la moitié du côté $k'd'_1$, et par suite : *au point de départ, la tangente à l'ellipse d'ombre est inclinée à 2 de hauteur pour 1 de base.*

Remarque. Sur l'épure (fig. 2) nous avons représenté l'ellipse complète, il n'y a que la partie inférieure et même une faible portion de cette partie ($b'_1 d'_1 a'_1$) qui soit utile. En b'_1 , nous rencontrons la droite verticale d'ombre portée sur le cylindre par l'arête de gauche b, b' .

4. OMBRE PORTÉE SUR UN CYLINDRE PAR SA BASE VIDE (fig. 4) OU OMBRE DU PONT.

Fig. 4.



Si au lieu d'un cercle plein, c'est l'ouverture même du cylindre qui projette son ombre dans l'intérieur, nous ne garderons de l'ellipse précédente que la portion $d'b'_1$. Cette ombre se présente très-souvent dans la pratique, notamment dans le cas où l'on coupe suivant l'axe une arcade ou un pont (fig. 5), ce qui lui fait donner le nom de *l'ombre du pont*. Si l'on se reporte à la fig. 4, on voit qu'on la tracera facilement de la manière suivante :

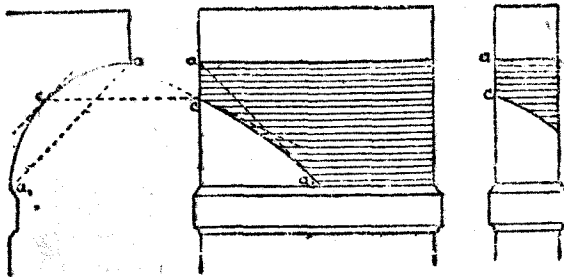
1° Par a , on mène la ligne à 45° , aa_1 jusqu'à l'axe du cylindre. Au point a_1 la tangente est à 45° ;

2° On prend, à l'aide des échelles ou du plan, le point c , qui serait à 45° sur la base (on a sensiblement $ac = \frac{3}{10}$ de ao).

On mène la tangente cm inclinée à 2 de hauteur pour 1 de base, et l'on trace ensuite facilement l'arc d'ellipse par les

points c et a_1 , en s'appuyant sur les tangentes. La fig. 5, représente en coupe un pont et une arcade; on y reconnaît l'ombre que nous venons de tracer.

Fig. 5.



5. EXPLICATION DE LA FIGURE 3 DE LA PLANCHE 7 (Texte, fig. 6).

On voit un demi cylindre creux, surmonté par un cylindre plein peu épais, et de même base que lui. L'ombre portée par ce dernier sur le premier est l'ellipse que nous venons d'étudier. Elle se complique de l'ombre portée sur la paroi plane de droite; cette ombre est la même, aux dimensions près, que celle que l'on rencontre fig. 2, planche 7.

A mi-hauteur, le cylindre est coupé par un diaphragme $m'n'$ coupé, lui-même, par le plan de coupe du cylindre.

L'ombre $n'm'$, est formée par un quart de cercle décrit de O' , comme centre, ainsi que nous l'avons démontré dans la dernière leçon.

6. EXPLICATION DE LA FIGURE 4, PLANCHE 7 (texte, fig. 7).

Nous avons le même cylindre que ci-dessus, mais il est ouvert à sa partie supérieure. C'est donc l'ombre du pont que nous rencontrons ici. On la tracera comme il vient d'être dit.

Nous trouvons, de plus, un disque horizontal $a'b'c'd'$, $m'n'p'q'$, ayant même axe que le cylindre.

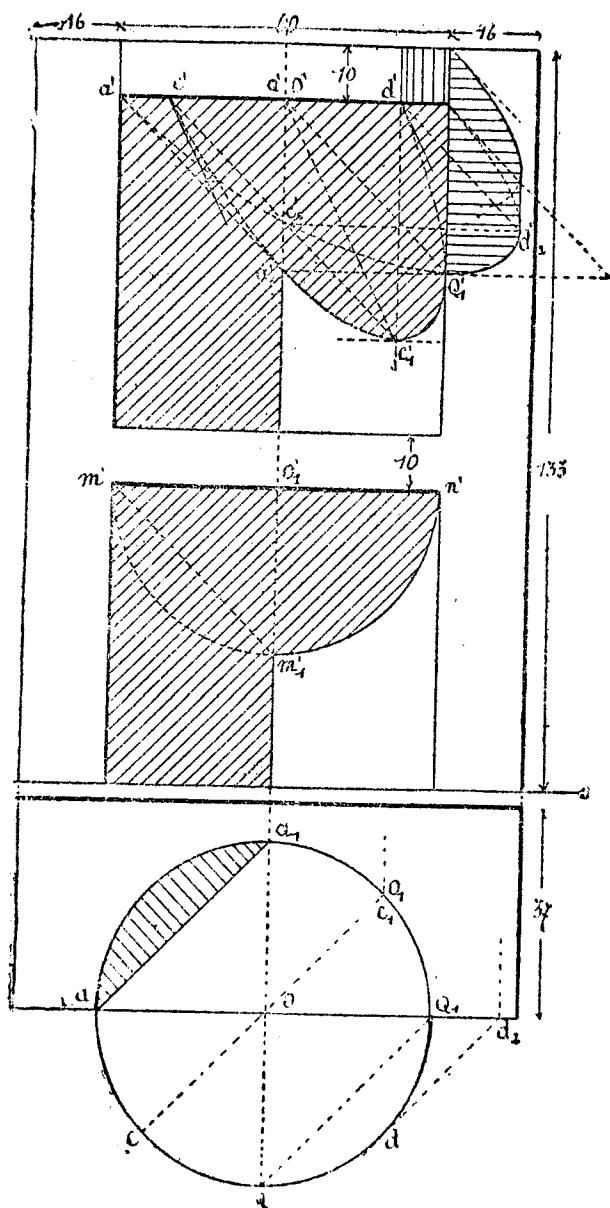
Pour en trouver l'ombre portée il faudra chercher successivement l'ombre de ses deux cercles de base. Commençons par la base inférieure, $m.n.p.q.$ — $m'n'p'q'$. On peut chercher l'ombre, soit en se servant du plan, soit en ayant recours à l'élévation seulement.

Exposons cette dernière méthode.

Le diamètre mn , $m'n'$, considéré comme une droite indéfinie,

portera ombre suivant le demi-cercle descendant $g_1'm'n'_1h$ tracé de p' comme centre. Les deux points m' et n' qui sont dessus, porteront ombre en $m'_1n'_1$, sur les lignes à 45° et sur ce demi-cercle.

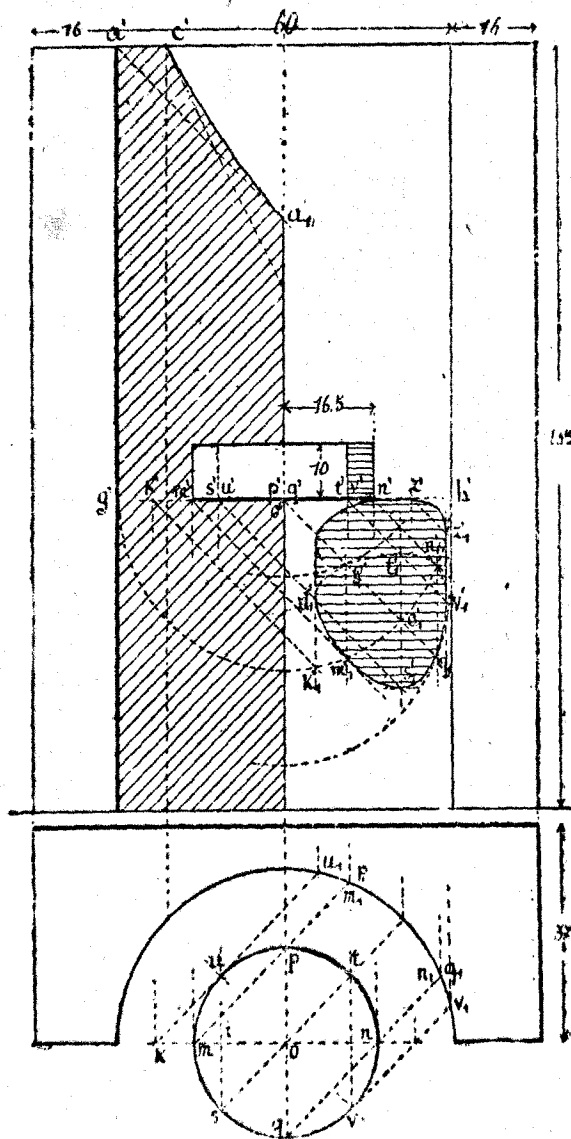
Fig. 6.



Quelles sont les tangentes en $m'_1n'_1$? Ce sont les lignes à 45° , pour deux raisons que voici :

1° $m'm'$, et $n'n'$, seraient le contour apparent du cylindre d'ombre du cercle $m.n.p.q.$ et l'ombre cherchée qui appartient à ce cylindre d'ombre doit être tangente à son contour apparent;

Fig. 7.



2° En m ou en n , la tangente au cercle est perpendiculaire au plan vertical; nous savons qu'une pareille droite porte ombre à 45° , donc en m' et n' la tangente est à 45° .

7. POINTS LE PLUS HAUT ET LE PLUS BAS.

A cause de la symétrie par rapport au plan à 45° , les points s et t donneront les points le plus haut et le plus bas.

Menons, en plan, le diamètre à 45° s, o, t . Il est dans la position d'une droite portant ombre sur le cylindre suivant une ligne droite (9^e leçon, n^o 7).

Or, le centre oo' porte ombre en o'_1 sur le cercle $m'n'_1$, et le diamètre st donne, comme ombre, la verticale s, t'_1 .

On a pris les points $s't'$, situés aux $3/10$ du rayon, et les rayons à 45° , menés par s' et t' , donneront avec la verticale précédente, les points le plus haut et le plus bas s'_1 et t'_1 . La tangente en ces points est horizontale.

8. POINTS LE PLUS A GAUCHE ET LE PLUS A DROITE.

Menons l'autre diamètre à 45° $u, v - u'v'$.

Les points u et v donneront en u'_1 et v'_1 les points cherchés, obtenus par l'une ou l'autre des deux manières suivantes :

1^o Si l'on veut se servir du plan, on aura l'ombre facilement, par la méthode qui donne l'ombre d'un point. Sur le plan on mènera uu_1 à 45° , puis la ligne de rappel u, u'_1 et la ligne à 45° , $u'u'_1$. De même pour le point v' et son ombre v'_1 .

2^o Si l'on veut se servir de l'élévation seule, prolongeons sur le plan la tangente uu jusqu'en k , situé sur le diamètre m, n . A cause des lignes à 45° , on a $KI = IO$, et par suite, $u'k' = u'o'$.

Or, le point k' porte ombre en k'_1 sur le cercle $m'n'_1$. La droite ku étant, en plan, à 45° , donne comme ombre une droite verticale $k'u'_1$, et le point u' portera ombre sur cette verticale. La construction sera donc la suivante :

1^o Porter $u'k' = v'o'$; 2^o mener la ligne à 45° , $k'k'_1$ jusqu'au cercle d'ombre $m'n'_1$; 3^o mener la verticale $k'u'_1$, jusqu'au rayon lumineux à 45° du point u' .

Pour le point à droite, à partir du point v' , on portera de v' en z' la distance $v'o'$, à droite au lieu de le faire à gauche, la construction se continuera comme pour le point u'_1 . Aux points u'_1 et v'_1 les tangentes sont verticales.

9. OMBRES DES POINTS p ET q SITUÉS SUR LE DIAMÈTRE DEBOUT.

Le plan les donnerait directement. Si l'on veut s'en passer, remarquons que m et p sont sur une ligne à 45° en plan; de

même pour n et q . Les lignes mp et nq donneront donc, comme ombres, des verticales $m'p'_1$ et $n'q'_1$, passant par les ombres connues m'_1 et n'_1 . Les rayons à 45° menés par m' et n' jusqu'à la rencontre de ces verticales donneront les ombres cherchées.

Tangentes en ces points.

Aux points p et q du cercle en plan, les tangentes seraient les côtés du carré qui sont parallèles à la ligne de terre. Or, ces côtés porteraient ombre suivant des arcs de cercle que nous savons tracer. Menons-les et la courbe d'ombre sera tangente en p'_1 et q'_1 à ces arcs de cercle.

Nous connaissons huit points de la courbe et les tangentes en ces points, cela suffit pour la construire.

10. OMBRE DU DISQUE COMPLET.

L'ombre de la base supérieure sera évidemment la même que celle de la base inférieure, mais montée de toute l'épaisseur du disque.

Relevons les huit points trouvés, d'une hauteur égale à cette épaisseur, et traçons une nouvelle courbe par ces huit points ; menons enfin les tangentes verticales par les points v'_1 et u'_1 , et reliant les deux courbes.

L'ombre sera formée de la portion du cylindre comprise entre les deux courbes et les deux tangentes verticales.

11. LAVIS.

Pour faire le lavis, nous trouverons, avec l'échelle n° 1, les lignes de teintes qui conviennent aux cylindres verticaux, aussi bien dans les parties en lumière que dans celles occupées par les ombres portées. Comme vérification, les lignes n° 0 devront se confondre avec les lignes d'ombre propre de nos cylindres.

Nous commencerons le lavis, sans nous inquiéter des ombres portées ; si ce n'est pour la teinte d'ébauche. La teinte d'ébauche (n° 0) sera passée sur toutes les ombres propres et portées en une seule fois, et en ayant bien soin de ne pas accuser de ligne de démarcation dans les parties où l'ombre portée vient se perdre dans l'ombre propre.

La teinte n° 0 une fois sèche, nous passerons les quatre teintes

d'ombres propres, comme si les ombres portées n'existaient pas.

Savoir :

Teinte n° 1, entre les lignes $+ 1$ et $\overline{1}$,
 Teinte n° 2, — $+ 2$ et $\overline{2}$,
 Teinte n° 3, — $+ 3$ et $\overline{3}$,
 Teinte n° 4, — $+ 4$ et $\overline{4}$, en diminuant chaque fois l'intensité de chacune d'elle (voir 6^e Leçon).

Nous placerons ensuite les trois teintes de couleur fer.

Savoir :

Teinte n° 5, entre les lignes $+ 5$ et $\overline{5}$,

Teinte n° 6, — $+ 6$ et $\overline{6}$,

Teinte n° 7, — $+ 7$ et $\overline{7}$,

Ces deux dernières recouvriront tout le cylindre.

Si l'on s'en tenait là, les cylindres seraient ombrés et modélés comme s'il n'y avait pas d'ombres portées. Ces dernières ne trancheraient sur les parties claires que par la teinte d'ébauche qui le recouvre en plus. Il faudra maintenant revenir sur *elles seules*, à l'aide des teintes 9, 10 et 11 d'ombres portées, de telle sorte, que les parties les plus noires soient précisément celles qui eussent été les plus claires si l'ombre portée n'eût pas existé.

Ces teintes seront les suivantes :

Teinte n° 9, entre les lignes $+ 5$ et $+ 5$. (Assez intense, plus noire que la teinte d'ébauche.)

Teinte n° 10, — $+ 2$ et $+ 2$. (Moins noire que la précédente.)

Teinte n° 11, — $+ 0$ et $+ 0$. (id. .)

12. REMARQUES, LAVIS PAR FLACHES (fig. 8).

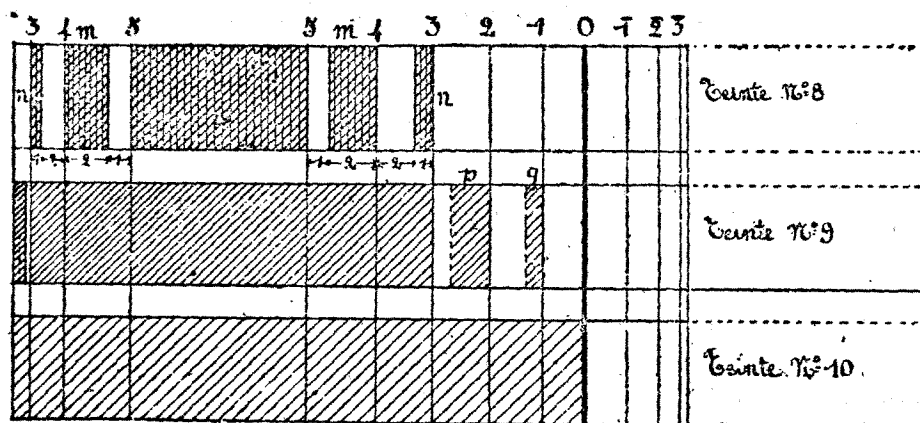
Pour simplifier le lavis, nous n'avons employé que trois teintes d'ombres portées. Pour avoir un effet tout à fait satisfaisant, il aurait fallu en prendre autant que de zones à recouvrir, c'est-à-dire 7. Mais cela est à peu près inutile. En effet, lorsque la région du lavis où l'on se trouve est très-noire, ce qui est le cas pour les portions dans l'ombre portée, les nuances sont difficiles à saisir et il est peu important de chercher à en donner beaucoup.

Lorsque les cylindres seront d'un grand diamètre, cela don-

nera des zones un peu trop larges ; dans ce cas, on ajoutera aux teintes ce que l'on nomme des *flaches* ; voici en quoi cela consiste.

Après avoir passé la première teinte d'ombre portée (n° 9) entre les lignes + 5 et + 5 ; on ajoutera, au pinceau, dans la zone suivante, 5.4, une bande de teinte *m*, *m*, qui en occupera environ les 2/3 (c'est ce que l'on nomme une *flache*), puis

Fig. 8.



dans la zone 4.3 une autre bande *n*, de la même teinte, en occupant environ le 1/3. La teinte n° 10 sera passée entre + 3 et + 3, et donnera 2 *flaches*, l'une *p* dans la zone 3,2 et l'autre *q* plus petite dans la zone 2,1, la première aux 2/3 et la seconde au 1/3 ! Enfin, la teinte n° 11 s'étendra, sans *flaches*, jusqu'à la ligne n° 0.

13. TRAVAIL DES ÉLÈVES. NATURE DES MATÉRIAUX.

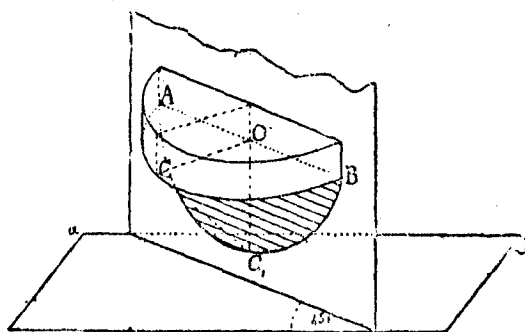
Les cylindres seront supposés être en fer et mi-polis. Les dimensions se trouvent sur la planche 7 et sur les croquis du livre. Pour la prochaine leçon, les élèves feront le tracé des ombres des figures 3 et 4. Ils traceront, à l'aide des échelles des corps *mi-polis*, les lignes de teintes, et feront le lavis, comme il vient d'être indiqué. Ils auront soin de placer dans les cases, faites pour cela les échantillons de toutes les teintes successives dont ils se serviront.

11^e LEÇON.OMBRES PORTÉES SUR LES CONES PLEINS
ET CREUX.1. OMBRE D'UN CERCLE HORIZONTAL SUR UN PLAN VERTICAL
A 45°.

Avant de résoudre les problèmes d'ombres portées sur les cônes, nous allons chercher l'ombre portée par un cercle horizontal sur un plan vertical à 45°, comme l'indique en perspective la figure 1 et en projection la figure 2.

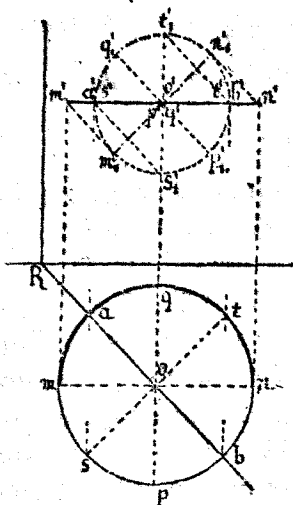
Supposons d'abord, fig. 2, que le plan à 45° QR passe par le centre o.

Fig. 1.



Les deux points aa' , bb' , à 45°, sont sur le plan, et par conséquent sont à eux-mêmes leurs ombres portées. Les points s et t , $s't'$, extrémités du diamètre perpendiculaire à ab portent ombre le point s' en s'_1 et le point t' en t'_1 (cette dernière serait une ombre montante, c'est-à-dire obtenue avec un rayon lumineux qui reviendrait sur ses pas. En réalité, elle n'existe donc pas).

Fig. 2.

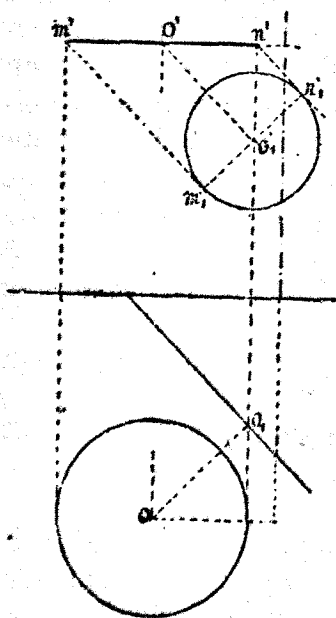


On voit immédiatement que $o's' = o'a' = o'b' = o't'$.

Comme les deux diamètres ab et st étaient à angle droit dans le cercle, les ombres $a'b'$ et $s't'$ de ces diamètres seront deux diamètres conjugués de l'ellipse d'ombre ; or, ici, ces deux diamètres conjugués sont égaux et perpendiculaires entre eux. Toute ellipse ayant deux diamètres conjugués dans ces conditions est un cercle.

Donc, sur un plan vertical à 45° , tout cercle horizontal porte ombre suivant une ellipse qui, en projection verticale, se projette suivant un cercle.

Fig. 3.



Si (fig. 3) le cercle est tout entier en avant du plan, l'ombre sera un cercle complet en projection verticale. (On remarquera que, dans l'espace et en vraie grandeur, cette ombre n'est pas un cercle ; elle est une ellipse ; mais située de telle sorte, qu'en projection verticale elle se projette suivant un cercle.)

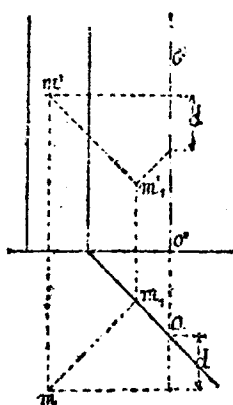
Si on cherche (fig. 2) l'ombre du point mm' extrémité du diamètre parallèle au plan vertical, on mènera le rayon lumineux $mm_1 - m'm'_1$, et l'ombre se trouvera en m'_1 . On voit immédiatement que les deux lignes $m_1m'_1$ et $o'm'_1$ sont à 45° , ce qui donne un moyen simple d'avoir immédiatement le point m'_1 en se servant de l'équerre

à 45° . Le point m'_1 étant connu, on trace le cercle d'ombre passant par ce point. Il donne, à son tour, en $a'b', s't'$, les points qui, dans l'espace, seraient sur les rayons à 45° du cercle.

2. OMBRE PORTÉE SUR UN PLAN VERTICAL A 45° PAR UN POINT DONT ON CONNAIT LA DISTANCE EN AVANT D'UNE VERTICALE DU PLAN.

Soit (fig. 4) m, m un point situé à la distance d en avant de l'axe $oo'o''$ par lequel passe le plan à 45° . On aura l'ombre en $m_1m'_1$ par la construction ordinaire.

Fig. 4.



Or, menons la ligne à 45° $m'm''$ et l'horizontale $m'o''$. Nous formons, en projection verticale, un quadrilatère $m'o''m''m'_1$, symétrique et égal au quadrilatère mm_1on , ce qui permet de trouver l'ombre du point m' de la manière suivante : Par m' , on mène l'horizontale $m'o''$ jusqu'à la rencontre avec l'axe en o'' . On prend, sur l'axe, un point m'' situé au-dessous de o'' (si le point m est en avant de l'axe) ou, au-dessus (si m est en arrière) d'une quantité d , égale à la distance du point en avant du plan de front de l'axe. Enfin, par m' et m'' , on mène deux

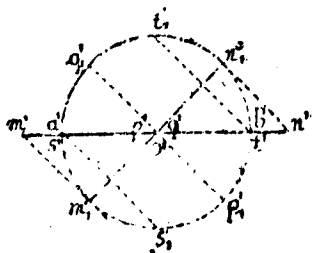
rayons à 45° à angle droit l'un sur l'autre, et l'on a au point de rencontre en m'_1 le point d'ombre cherché.

On remarquera l'analogie de cette construction avec celle que nous avons donnée pour trouver l'ombre d'un point sur un cylindre, quand on connaît la distance du point en avant de l'axe du cylindre.

Nous nous servirons souvent de cette ombre portée ; il faut savoir la tracer facilement et, reconnaître de quels points du cercle de l'espace les différents points sont l'ombre.

Soit (fig. 5) $m'n'$ le cercle en projection verticale. Par n' , menons la ligne à 45° ; puis, de o' , une droite $o'p'_1$ perpendiculaire sur la précédente, et le cercle $p'_1m'_1a'_1$, ayant cette droite pour rayon et par conséquent tangente à $m'_1p'_1$; ce sera l'ombre cherchée. Les deux points a' et b' , où il coupe la droite mn , sont les points à 45° du cercle de l'espace. Si ce dernier était la base d'un cylindre, ce seraient les points d'origine de l'ombre propre.

Fig. 5.



Soit (fig. 5) $m'n'$ le cercle en projection verticale. Par n' , menons la ligne à 45° ; puis, de o' , une droite $o'p'_1$ perpendiculaire sur la précédente, et le cercle $p'_1m'_1a'_1$, ayant cette droite pour rayon et par conséquent tangente à $m'_1p'_1$; ce sera l'ombre cherchée. Les deux points a' et b' , où il coupe la droite mn , sont les points à 45° du cercle de l'espace. Si ce dernier était la base d'un cylindre, ce seraient les points d'origine de l'ombre propre.

Les points le plus à droite et le plus à gauche, m' et n' , portent ombre en $m'_1n'_1$ sur un premier diamètre à 45° de l'ombre. Les points p' et q' du cercle situés sur le diamètre perpendiculaire au plan vertical, portent ombre en $p'_1q'_1$ sur le deuxième diamètre à 45° de l'ombre.

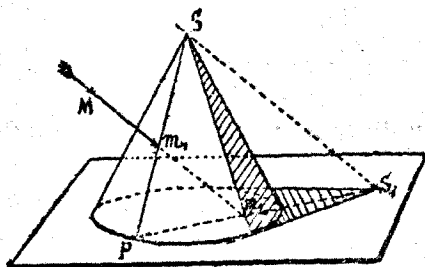
Enfin, les points s' et t' , situés dans le plan de symétrie à 45° , portent ombre en $s'_1t'_1$ sur la verticale du centre.

Tout le demi-cercle, situé entre m' en n' et en avant, porte ombre en $m'_1p'_1n'_1$. L'autre, située en arrière, porte ombre suivant $m'_1q'_1n'_1$. Nous ferons toujours, dans nos épreuves, cette dernière en pointillé mixte, et l'autre en pointillé ordinaire pour les différentier.

3. OMBRE PORTÉE PAR UN POINT SUR UN CONE.

Soit (fig. 6), en perspective, un cône SABC, et M un point extérieur. Nous menons en Mm_1 le rayon lumineux du point. Le problème revient à chercher le point m_1 où ce rayon lumineux perce le cône.

Fig. 6.



On prendra le plan de base du cône pour plan auxiliaire sur lequel on cherchera :

- 1° L'ombre portée par le cône et par toutes ses génératrices ;
- 2° L'ombre portée par le point M.

A cet effet : soit s_1 l'ombre portée sur ce plan auxiliaire par le sommet S du cône ; et soit m_2 l'ombre portée par le point M. Si je joins s_1m_2 , cette droite rencontre la base du cône au point p ; et l'on voit que s_1p est l'ombre de la génératrice Sp du cône, et que m est l'ombre du point m_1 de cette génératrice.

D'après la 3^e méthode pour la recherche des ombres (1^{re} leçon, méthode des ombres portées) puisque le point M porte ombre en m'_2 sur le plan auxiliaire, et que m est l'ombre d'un point m_1 de la génératrice Sp , c'est que M porte ombre en m_1 sur le cône.

La méthode se ramène donc à ce qui suit : 1° on prend un plan auxiliaire ; 2° on cherche l'ombre portée sur lui par le cône et par toutes ses génératrices ; 3° on cherche aussi l'ombre portée par le point ; 4° on prend la génératrice sur l'ombre de laquelle

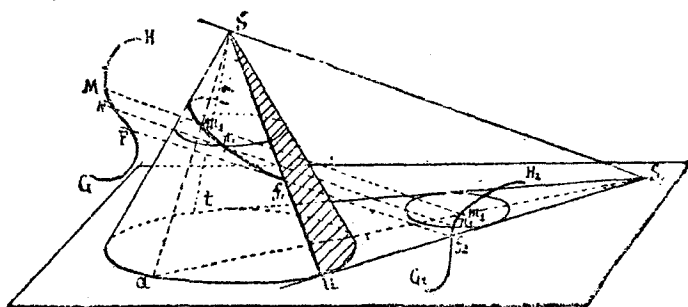
tombe l'ombre du point, et, remontant par un rayon lumineux inverse, on trouve sur cette génératrice l'ombre du point.

4. OMBRE PORTÉE SUR UN CONE PAR UNE COURBE QUELCONQUE.

Soit, en perspective (fig. 7), un cône et une courbe MNG. Prenons un plan auxiliaire, qui peut être le plan de base du cône ou tout autre plan (dans la figure 6, c'est le plan de base). Cherchons en S_2 l'ombre portée du sommet. L'ombre portée du cône est comprise entre les deux tangentes S_2t et S_2u .

Prenons, en outre, en $m_2m_2f_2$ l'ombre portée sur le plan par la courbe MNG.

Fig. 7.



Le problème pourra se présenter de trois manières; ou bien on demandera :

1^{er} *Problème*. Quel est le point de l'ombre situé sur telle ou telle génératrice du cône? (sur Sa , par exemple). Dans ce cas, on cherche l'ombre portée par Sa : c'est la droite S_2a . On prend le point m_2 où elle coupe l'ombre portée par la courbe, et par un rayon inverse m_2m_1 , on remonte en m_1 jusqu'à l'ombre portée par le cône. Ou bien on demandera :

2^e *Problème*. Ou porte ombre sur le cône tel ou tel point de la courbe (le point M, par exemple)? C'est le problème traité au n° 2.

On prendra l'ombre portée en m_2 sur le plan par le point M. On joindra S_2m_2 ; on prolongera en a jusqu'à la courbe de base du cône. La génératrice Sa porte ombre en S_2a , et le point M porte ombre en m_1 sur cette génératrice. Enfin, on pourra se demander :

3^e *Problème*. Quel est le point de l'ombre situé sur telle ou

On prendra, fig. 7: 1° l'ombre portée sur le plan par la courbe MNG; 2° l'ombre portée par le cercle n_1 . Soit n_2 cette ombre. (Si le plan auxiliaire est le plan de base, et si le cercle n_1 est parallèle à la base, cette ombre n_2 sera un cercle parallèle et égale au cercle n_1 de l'espace); 3° on prendra l'intersection n_2 des deux courbes d'ombres portées, et remontant par un rayon inverse on aura en n_1 sur le cercle n_1 le point d'ombre demandé.

5. RECHERCHE DES POINTS DE PERTE.

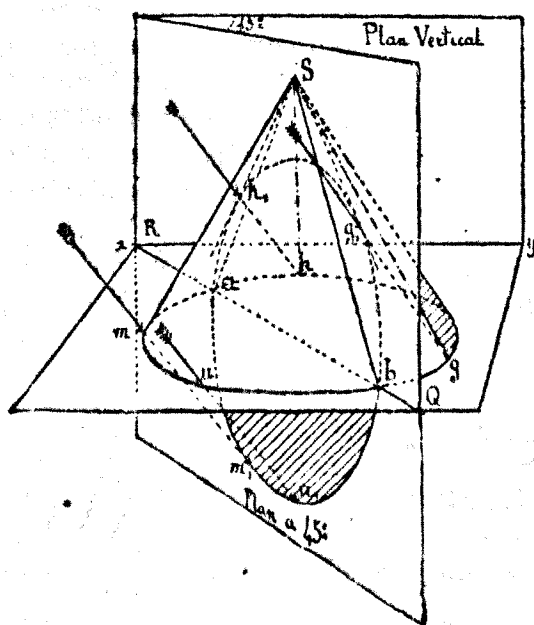
La recherche des points de perte où l'ombre portée se perd dans l'ombre, revient à trouver les points de l'ombre portée situés sur les génératrices d'ombre propre Su ou St . On prendra le point f_2 où l'ombre portée auxiliaire coupe la tangente S_2u , ou S_2t , et l'on remontera du point f au point f_1 à l'aide de rayons inverses. (C'est le premier problème.)

On sait qu'aux points tels que f_1 les tangentes à la courbe d'ombre $m_1n_1f_1$ sont les rayons lumineux.

6. EMPLOI D'UN PLAN AUXILIAIRE A 45°.

Quand nous voudrions déterminer les ombres portées sur un cône, sans nous servir de la projection horizontale, il sera

Fig. 8.



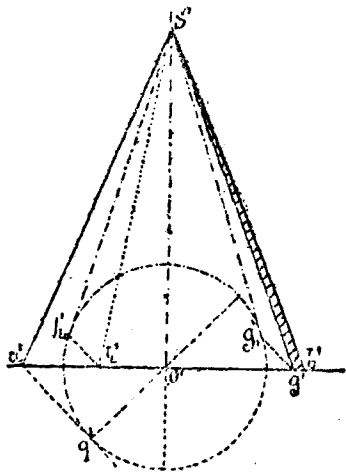
commode, au lieu de prendre la base comme plan auxiliaire sur lequel on portera des ombres auxiliaires, de choisir le plan à 45° , que nous avons étudié au commencement de la leçon.

On voit d'abord (fig. 8) qu'il passe par le sommet S . Le point S est donc à lui-même son ombre portée sur ce plan auxiliaire. L'ombre de la base sera l'ellipse abm_1 (projetée verticalement suivant un cercle) et passant par les points a et b , situés à 45° sur la base du cône.

Si du point S on mène les deux tangentes Sg_1 , Sh_1 , à l'ombre abm_1 de la base ; ces deux droites seront les limites de l'ombre portée du cône sur le plan à 45° , auxiliaire. Et si l'on mène le rayon lumineux g_1g et h_1h jusqu'à la base du cône, on aura en Sg et Sh , les génératrices d'ombre propre du cône.

Cette construction donne un moyen assez simple de trouver en élévation la ligne d'ombre propre d'un cône, sans se servir du plan (fig. 9).

Fig. 9.



En effet, soit, en projection verticale $S'a'b'$ un cône en relief, dont on veut trouver les génératrices d'ombre propre. On construit en o' , à l'aide de deux lignes à 45° $o'q'$ et $a'q'$, comme nous l'avons indiqué, le cercle d'ombre portée par la base du cône sur le plan auxiliaire à 45° . S' est l'ombre portée du sommet sur ce même plan. On mène les deux tangentes à ce cercle, $S'g'_1$ et $S'h'_1$. Ces deux droites sont les ombres portées sur le plan à 45° par les génératrices d'ombre propre du

cône.

On mène ensuite les rayons à 45° g'_1g' et h'_1h' jusqu'à la rencontre avec la base, et l'on a en $S'g'$ et $S'h'$ les génératrices d'ombre propre du cône.

7. ÉPURE DE L'OMBRE PORTÉE PAR UN POINT SUR UN CÔNE.

1^{re} méthode (fig. 10) : en se servant de la projection horizontale.

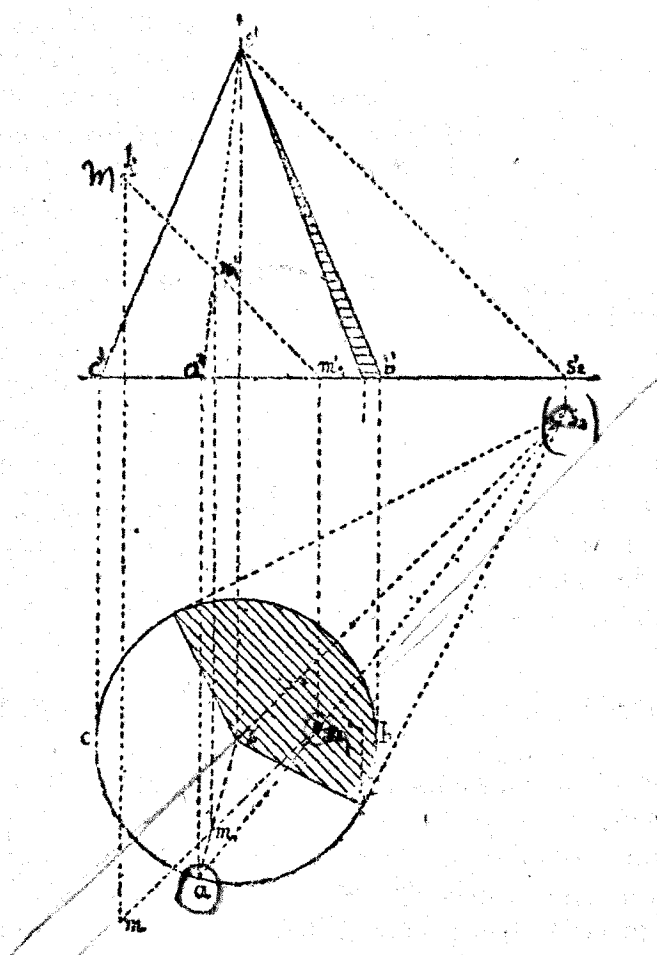
Soit abc , $a'b'c'$, la base d'un cône, SS' son sommet, et soit mm' un point :

OMBRES PORTÉES SUR LES CONES PLEINS ET CREUX. 153

On cherche en S_2S_2' l'ombre portée par le sommet du cône sur le plan horizontal, et en m_2m_2' l'ombre portée par le point m .

Joignons S_2m_2 et prolongeons jusqu'à la rencontre en a , avec

Fig. 10



la base. Nous menons Sa , $S'a'$; cette génératrice du cône est celle qui porte ombre suivant S_2m_2 . Enfin, revenons sur cette génératrice, du point m_2 au point m_1 par un rayon lumineux inverse, et nous aurons en m_1m_1' l'ombre portée par le point $m'm_1$ sur le cône.

2^e méthode (fig. 11) : sans se servir de la projection horizontale, en se servant du plan auxiliaire à 45°.

Soit le même cône, donné en élévation seulement, et soit m' le point déterminé par sa projection verticale et par la distance d , à laquelle il est en avant de l'axe du cône.

Nous prenons comme plan auxiliaire d'ombres portées le plan

OMBRES PORTÉES SUR LES CONES PLEINS ET CREUX, 155

points quelconques de l'ombre ; il est préférable de connaître :

- 1° Le point le plus bas ;
- 2° Les deux points situés sur le contour apparent ;
- 3° Les points d'origine, c'est-à-dire ceux où la courbe d'ombre vient rencontrer la base ;

Nous avons dit, dans la précédente leçon, que ces points sont ceux de la base pour lesquels le rayon lumineux est tangent au cône.)

- 4° Le point de brisure, c'est-à-dire celui où l'ombre de la base viendra rencontrer l'ombre de la génératrice de coupe.

9. POINT LE PLUS BAS.

Reprenons le cône, et l'ombre auxiliaire de son cercle de base sur le plan à 45° .

Nous aurons le point le plus bas de deux manières :

Première manière. En nous servant de l'équerre à l'angle φ . Par le point a' , menons le rayon φ jusqu'en a''_1 , où il coupe le contour du cône : ramenons a''_1 en K'_1 par une rotation de 45° , ce qui se fera soit en prenant $a'_1 K'_1 = 3/10$ du rayon a''_1 ; soit à l'aide des échelles, soit en joignant $s'h'$, soit en menant la ligne à $45^\circ K'K'_1$, car le point le plus bas sera à cause de la symétrie par rapport au plan de symétrie à 45° , l'ombre du point K' de la base, situé à 45° .

Deuxième manière. En se servant du cercle d'ombre auxiliaire. Le problème revient à trouver l'ombre portée par le point K' de la base.

Or, K' porte ombre en K'_2 sur le plan à 45° , je joins $s'K'_2$, et je prolonge jusqu'en h'_2 ; h'_2 est l'ombre du point h' de la base. Je joins $s'h'$ et le point K' porte ombre sur cette droite en K'_1 . C'est le point le plus bas ; la tangente y est horizontale.

10. POINT SUR LE CONTOUR APPARENT.

Il n'y en aura que sur le contour apparent de droite $s'b'$. Le problème revient à chercher le point de l'ombre situé sur une génératrice donnée $s'b'$.

Le point b' porte ombre en b'_2 sur le plan à 45° , $s'b'$ est l'ombre auxiliaire de $s'b'$. Elle rencontre en d'_2 l'ombre auxiliaire de la base. Je mène le rayon à $45^\circ d'_1 d'_2$, et j'ai eu d'_1 le point cherché.

En ce point la courbe est tangente au contour apparent $s'b'$.

11. POINT PROJETÉ SUR L'AXE.

Pour des raisons de symétrie expliquées déjà plusieurs fois, si nous ramenons le point d'_1 en j'_1 sur l'axe, nous aurons le point de la courbe projeté verticalement sur l'axe.

12. POINT D'ORIGINE.

Menons au cercle d'ombre auxiliaire les deux tangentes $s't'_2$ et $s'u'_2$.

Remontons par les lignes à 45° de t'_2 en t' et de u'_2 en u' sur la base $a'b'$. Nous aurons en t' et u' les points d'origine.

En effet, cherchons l'ombre portée sur le cône par le point t' de la base. D'après la méthode ordinaire, nous chercherions l'ombre auxiliaire t'_2 du point t' . Nous joindrions $s't'_2$, et nous prendrions la nouvelle intersection de cette droite avec le cercle d'ombre. Mais $s't'_2$ lui étant tangent, cette nouvelle intersection se confondrait en t'_2 avec la première, ce qui prouve que le point t' porte ombre sur lui-même. Il est à lui-même son ombre portée. La courbe d'ombre rencontre la base $a'b'$, dont elle est l'ombre, aux points d'origine t' et u' .

13. POINT DE BRISURE.

On l'obtiendra en cherchant l'ombre portée par le point a' .

a' porte ombre auxiliaire en a'_2 .

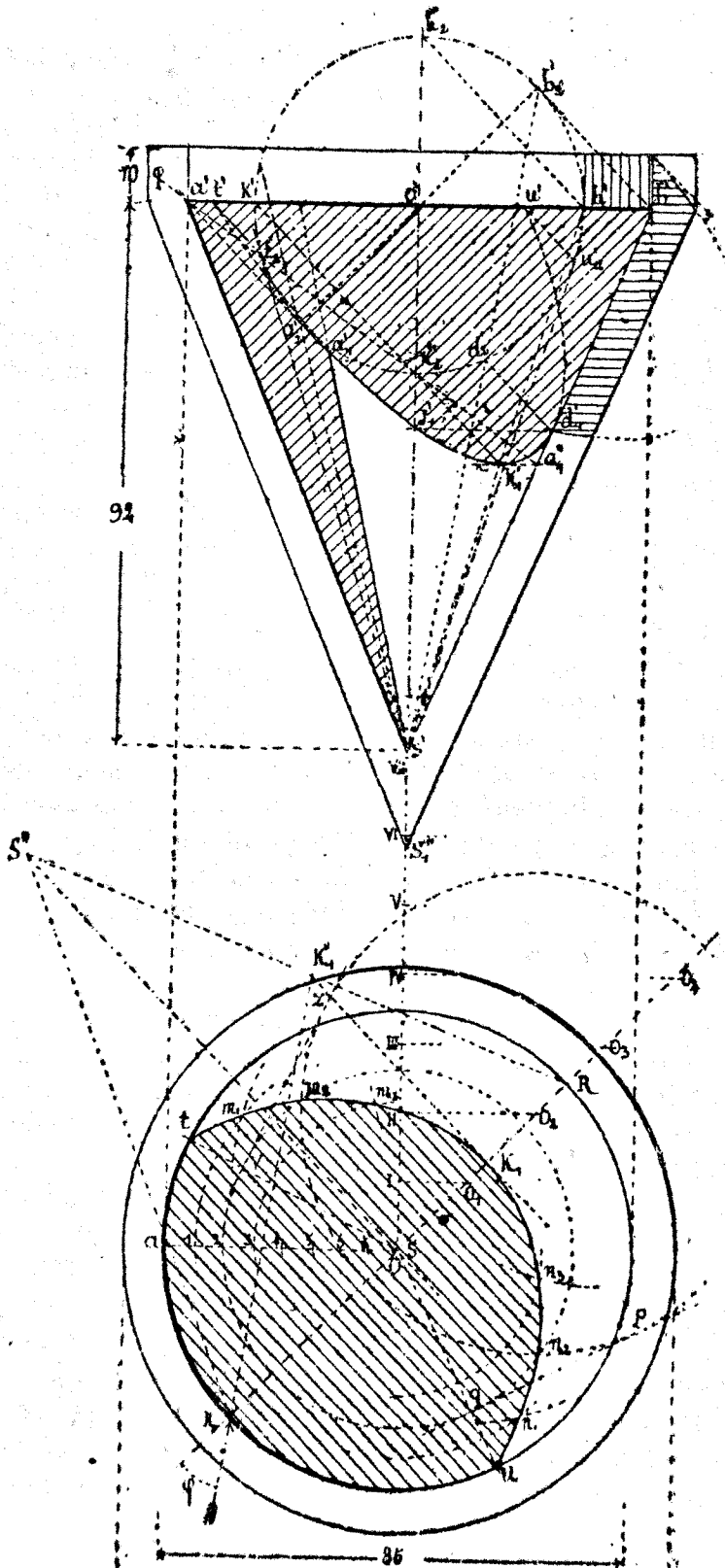
Je joins $s'a'_2$. Je prolonge jusqu'en f'_2 sur le cercle d'ombre, je mène la ligne à 45° f'_2f' ; et la génératrice $s'a'_1$ est celle dont l'ombre auxiliaire $s'f'_2$ vient rencontrer l'ombre a'_2 du point a' .

Menons la ligne à 45° , $a'a'_1$ jusqu'à cette génératrice et nous aurons en a'_1 le point demandé. Si nous joignons $s'a'_1$ nous aurons l'ombre portée sur le cône par la génératrice de coupe $s'a'$.

Au point a'_1 , la tangente est la ligne à 45° , pour les mêmes raisons que celles qui ont été données à l'occasion du cylindre.

Nous avons ainsi les points les plus importants de l'ombre. Nous laissons aux élèves le soin de résumer ces constructions comme nous l'avons fait pour le problème analogue sur le cylindre. Ils reconnaîtront qu'elles se réduisent, en réalité, à fort peu de chose.

Fig. 1.



11. OMBRE PORTÉE SUR UN CONE CREUX PAR SON CERCLE DE BASE. (*En projection horizontale.*)

Ayant obtenu, comme nous venons de le voir, l'ombre en projection verticale, nous pourrions en déduire par des lignes de rappel, l'ombre en projection horizontale. Mais, il peut être utile de savoir déterminer *à priori* cette ombre, sans se servir de la projection verticale.

Soit le sommet, *a.R.u.* le cercle de base. On suppose connue la hauteur h du cône, que l'on prendra sur la projection verticale.

Proposons-nous de trouver les points de l'ombre, situés sur un parallèle donné, ou sur une série de parallèles équidistants.

Je suppose que nous ayons divisé la génératrice sa , en 6, 8 ou 10 parties égales (adoptons 8), que par les points de division 1, 2, 3, 4... nous menions les parallèles correspondants: ils seront situés à $\frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{3}{8}...$ de la hauteur h du cône. Cherchons le point

de l'ombre qui se trouvera sur le deuxième parallèle, par exemple. Si nous prenons son plan comme plan auxiliaire d'ombre portée, nous chercherons sur ce plan l'ombre portée par le cercle de base *a.R.A* cet effet, par *O*, nous aurons mené une verticale égale à la hauteur h du cône. Nous l'aurons partagé en 8 parties égales, et par le deuxième point de division, si nous menons l'horizontale II, O_2 , nous aurons en O_2 sur le rayon à 45° du point *O*, l'ombre portée du point *O* sur le parallèle n° 2, et par suite le centre de l'ombre portée par le cercle de base sur le plan de ce parallèle.

De ce point O_2 . décrivons un cercle, ou simplement un arc de cercle avec un rayon égal à celui de la base, et les points $m_2 n_2$, où il coupera le parallèle, seront les points de l'ombre portée par la base sur ce parallèle. On voit que cette construction donnera très-rapidement 2, 4, 6, 8 points de l'ombre, symétriques deux à deux par rapport au plan de symétrie à 45° . Nous aurons les centres O_1, O_2, O_3, O_4 , desquels nous décrirons avec un rayon constant, égal au rayon de base, des arcs de cercle; nous prendrons les points de rencontre $m_1 n_1, m_2 n_2, m_3 n_3...$ avec les parallèles 1, 2, 3... et nous aurons ainsi autant de points de l'ombre que nous en voudrons.

En les joignant, par une ligne continue, nous aurons la courbe. Si nous faisons avec soin cette jonction des points, en nous laissant guider par le sentiment de la continuité, nous pourrions

avec assez d'exactitude, trouver le point K_1 situé sur le plan de symétrie à 45° , et les deux points d'origine t_1 et u_1 de la courbe sur la base.

Il pourrait être utile de les déterminer directement.

15. POINT SITUÉ SUR LE PLAN DE SYMÉTRIE.

Il sera obtenu en cherchant directement l'ombre portée sur le cône par le point K . Employons la méthode des plans sécants. Coupons le cône par le plan sécant KO_4 et rabattons sur le côté, autour de KO_4 comme charnière, la section ainsi faite.

Le sommet S se rabat en S'' à une hauteur h , et les deux génératrices SK , SR se rabattent en $S''K$, $S''R$. Le rayon lumineux est rabattu à l'angle φ .

Menons par le point K le rayon φ , jusqu'au point K'' , où il coupe la génératrice $S''R$ et nous aurons en K'' relevé en K_1 , le point demandé. En ce point, la tangente est perpendiculaire au rayon lumineux.

16. POINTS D'ORIGINE.

Nous savons que ces points sont sur la base et que le rayon lumineux y est tangent au cône ; autrement dit, si le cône était un cône plein, ces points seraient les pieds des deux génératrices d'ombre propre du cône.

Si, comme c'est le cas pour la figure 1, de la planche qui nous occupe, le cône est un de ceux pour lesquels nous avons construit des échelles on aura ces points en se servant de l'échelle n° 7. (Cônes à $22^\circ 1/2$ et en plan, teinte n° 0). S'il n'en est pas ainsi, on procédera de la manière suivante :

Reprenons le cercle O_2 qui nous a servi pour trouver l'ombre portée sur la parallèle n° 2, et menons les tangentes communes vz , pq à ce cercle et au parallèle. Ces deux droites étant l'enveloppe de ces deux cercles, seraient l'ombre portée par le cône s'il était plein, sur le plan du parallèle, et par suite les droites sv , et sq seraient les génératrices d'ombres propres du cône. Prolongeons-les jusqu'à la base et nous aurons en t et u les deux points d'origine.

Il serait intéressant d'avoir les tangentes en ces points; mais leur recherche serait un peu trop compliquée.

17. ÉPURE DE LA FIG. 1, PLANCHE 8.

La figure 1, de la planche 8, représente en élévation un demi-cône creux, et en plan, le cône entier. On cherchera en projection verticale l'ombre portée par le cercle de base supposé plein, et en projection horizontale l'ombre, ou plutôt le jour porté par le même cercle supposé vide. On fera l'épure de la projection verticale, sans se servir du plan, en ayant recours au plan auxiliaire à 45° . On exécutera ensuite l'épure de la projection horizontale, directement, par la méthode de l'ombre portée sur les parallèles. Comme vérifications finales, les points situés aux origines, le plus bas, et sur la génératrice de contour apparent vertical, devront être deux à deux sur les mêmes lignes de rappel.

18. LAVIS DE LA FIGURE 1.

Le cône est à $22^\circ 1/2$. Les échelles de teintes dont on se servira seront donc les échelles n° 6' et 7', corps mi-polis. Les objets figurés planche 8 seront supposés en fonte. On tracera les lignes de teintes sans s'inquiéter si elles traversent les portions dans la lumière où celles dans l'ombre portée. On passera la teinte d'ébauche, n° 0, sur tout ce qui est dans l'ombre propre ou portée, en ayant soin qu'il n'y ait aucune ligne de démarcation dans la région où ces deux ombres se mêlent. Puis, les teintes d'ombre propre 1.2.3.4, des lignes $\bar{1}$ à $+1$, de $\bar{2}$ à $+2$ de $\bar{3}$ à $+3$, de $\bar{4}$ à $+4$.

Ensuite les teintes de couleur (fonte), n° 5, 6, et 7, des lignes $+5$ à $\bar{5}$, $+6$ à $\bar{6}$, $+7$ à $\bar{7}$. Enfin les teintes d'ombres portées, n° 8, 9, et 10, entre $+5$ et $+5$, $+2$ et $+2$, et 0, 0. En opérant par flaches si l'on juge que les zones occupées par ces teintes soient un peu trop larges.

19. TRAVAIL DES ÉLÈVES.

Pour la première leçon les élèves auront fait au crayon, puis à l'encre : 1^o le cadre et tous les titres de la planche 8; 2^o le trait des contours de *toutes* les figures de cette planche, non-seulement du cône, mais des deux sphères qui forment les fig. 2 et 3; 3^o au crayon seulement, le tracé des ombres de la fig. 1. Les lignes d'ombres portées pourront être faites à l'encre très-pâle, afin de permettre d'effacer à la gomme les traits de crayon inutiles; 4^o le lavis de la fig. 1.

Dans la prochaine leçon, on expliquera les figures 2 et 3.

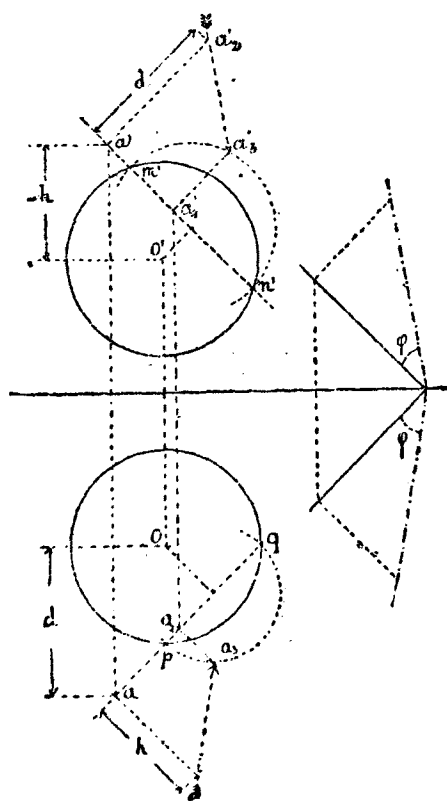
*Plan vertical
projeté
rabattu*

12^e LEÇON.

OMBRES PORTÉES SUR LES SPHÈRES PLEINES ET CREUSES.

1. OMBRE PORTÉE PAR UN POINT (fig. 1.)

La méthode des plans sécants est celle que nous emploierons le plus souvent pour trouver les ombres portées sur une sphère.



Soit, en projection verticale, a' un point, et o' le centre d'une sphère. On connaît la distance d , à laquelle le point se trouve en avant du plan de front du centre de la sphère. Menons le rayon lumineux $a'a'_1$. Il faut chercher le point où ce rayon lumineux coupe la sphère.

Prenons comme plan sécant le plan $a'a'_1$, qui projette verticalement le rayon lumineux. Il coupe la sphère suivant un petit cercle ayant $m'n'$ pour diamètre. Rabattons ce petit cercle autour de ce diamètre ; il se rabat en vraie grandeur suivant le cercle ayant $m'n'$ pour diamètre. Le point a' se

rabat en a'_2 à une distance égale à la distance d ; le rayon lumineux se rabat à l'angle φ .

Menons donc par a'_2 le rayon φ . Prenons le point a'_3 où il coupe le cercle rabattu, relevons a'_3 en a'_1 , et nous aurons l'ombre demandée.

La construction est très-simple et s'appliquera aussi bien à la projection horizontale que verticale : seulement, il faudra connaître la hauteur h , à laquelle le point est au-dessus du plan horizontal du centre de la sphère.

La figure inférieure s'applique au cas où on chercherait l'ombre portée par un point en projection horizontale.

La figure supérieure s'applique à la projection verticale.

Vérification. a_1, a'_1 sont sur une même ligne de rappel. On voit en les deux rabattements du rayon lumineux qui servent pour faire l'épure.

La construction serait la même pour une sphère creuse.

2. OMBRE PORTÉE PAR UNE COURBE.

On cherchera, comme ci-dessus, les ombres portées par un certain nombre des points de la courbe; on les joindra par une ligne continue et l'on aura l'ombre demandée.

Si la courbe est un cercle, il est probable que certains points seront plus importants que d'autres à trouver; on les cherchera par des procédés spéciaux, comme nous allons le faire voir tout à l'heure.

Si la courbe était un cercle appartenant à la sphère, nous savons que, dans ce cas, l'ombre portée serait une courbe plane, et comme toute section plane d'une sphère est un cercle, l'ombre serait également un cercle dans l'espace et une ellipse en projection.

3. OMBRE PORTÉE SUR UNE SPHÈRE PAR UN CERCLE HORIZONTAL (Fig. 2, pl. 3. — Texte fig. 3.)

Nous supposons que le plan du cercle est tangent à la sphère, et que son centre est sur la verticale du centre de la sphère.

Nous chercherons d'abord l'ombre en projection verticale, sans nous servir de la projection horizontale. Nous ferons ensuite le contraire, et comme vérifications, les points trouvés devront être sur les mêmes lignes de rappel.

Soit $a'b'$ le cercle de base d'un disque de faible épaisseur,

o' le centre de la sphère. Cherchons d'abord par les procédés ordinaires l'ombre propre de la sphère et celle du cylindre formant le disque. Ces constructions sont connues, nous ne les expliquerons pas.

4. POINT LE PLUS HAUT.

Le centre du disque étant sur la même verticale que celui de la sphère, tout est symétrique par rapport au plan de symétrie à 45° , et le point le plus haut sera donné en cherchant l'ombre portée par le point d' à 45° dans le cercle.

Ramenons, par une rotation, ce point en a ; menons le rayon φ par a' jusqu'en c'_1 , où il rencontre le méridien de la sphère ; ramenons le point c'_1 en d'_1 , en le faisant tourner de 45° , ce qui se fera, soit en prenant les $3/10$ du rayon du point c'_1 , soit en menant par d' la ligne à 45° $d'd'_1$ jusqu'à la rencontre avec l'horizontale $c'd'_1$.

En d'_1 , la tangente est horizontale.

5. POINT DE PERTE DANS L'OMBRE PROPRE DE LA SPHÈRE.

Nous aurons recours au plan auxiliaire à 45° .

Cherchons d'abord, comme à l'ordinaire, l'ombre auxiliaire $d'a'_2$ du cercle $a'b'$.

Cherchons aussi l'ombre portée par la sphère sur le plan auxiliaire ; ce sera la même que celle portée par la ligne d'ombre propre.

Or, cette dernière est un cercle ; elle portera donc ombre sur le plan auxiliaire suivant une ellipse dont il suffira d'avoir les deux axes ou deux diamètres conjugués pour la tracer.

Les deux points $e'f'$ de cette ombre, situés sur l'équateur, sont aussi dans le plan à 45° . Ils sont donc à eux-mêmes leur ombre portée.

Le point le plus haut h' de l'ellipse d'ombre propre étant dans le plan de symétrie à 45° , porterait ombre sur le plan auxiliaire sur l'axe lui-même, en h'_2 , obtenu en menant la ligne à 45° $h'h'_2$. On aurait autrement ce point en menant le rayon φ , $h'h'_3$ tangent à la sphère en h'_3 .

Les deux droites $o'f'$ et $o'h_2$ sont les deux demi-axes de l'ellipse d'ombre auxiliaire cherchée.

On la construira donc à l'aide de la bande de papier, ou des échelles.

Cette ellipse coupe le cercle d'ombre auxiliaire du cercle $a'b'$

en un point g'_2 . Si nous menons $g'_2g'_1$ à 45° , nous aurons en g'_1 , sur l'ellipse d'ombre propre, le point de perte.

L'ellipse et le cercle auxiliaire se recoupent en v'_2 , qui donne en v'_1 le deuxième point de perte. Ce dernier est caché.

Aux deux points de perte, les tangentes sont le rayon lumineux à 45° .

A la rigueur, la connaissance du point le plus haut et du point de perte suffit pour tracer la courbe assez exactement. On fera bien cependant de déterminer entre les deux un point intermédiaire.

6. POINTS SUR UN PARALLÈLE DONNÉ.

On choisira un parallèle $m'n'$ compris entre les deux points précédents, et on cherchera le point de l'ombre situé sur ce parallèle.

A cet effet, on prendra, comme à l'ordinaire, son cercle d'ombre auxiliaire. Il recoupe en $s'_2t'_2$ le cercle d'ombre auxiliaire de $a'b'$. On revient par les lignes à 45° des points $s'_2t'_2$ aux points $s'_1t'_1$, sur le parallèle $m'n'$, et l'on a deux nouveaux points dont l'un est caché.

7. POINT PROJETÉ SUR L'AXE ET POINT SUR LE CONTOUR APPARENT.

On l'aura assez exactement en traçant d'un trait continu la courbe déterminée par les points qui précèdent; le point J'_1 , où elle recoupera l'axe sera le point demandé.

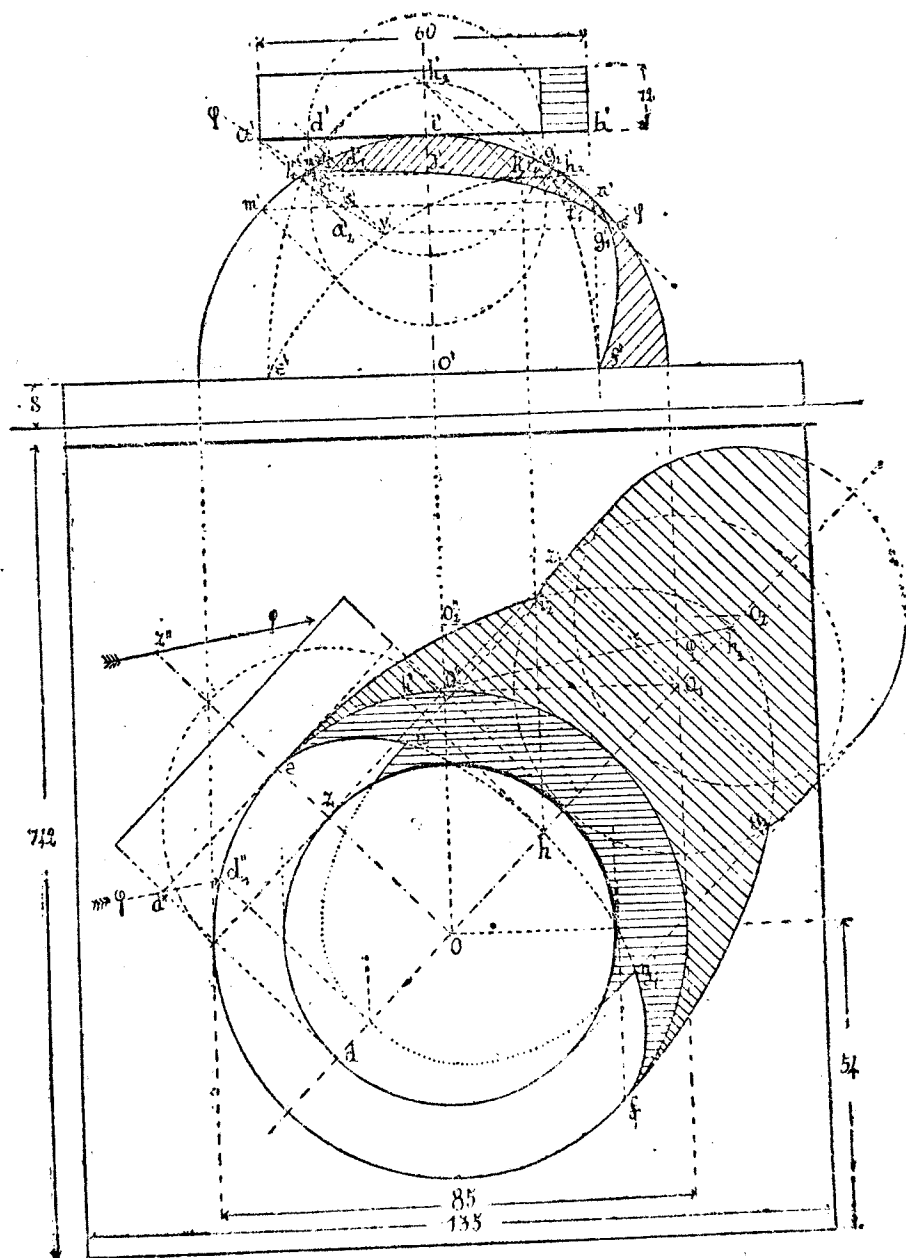
Par des raisons de symétrie, développées plusieurs fois déjà, on mène l'horizontale J'_1 , on aura en v'_1 le point situé sur le contour apparent.

8. ÉPURE DE L'OMBRE EN PROJECTION HORIZONTALE.

Dans l'épure en question, on suppose que la sphère et le disque portent ombre sur le plan horizontal sur lequel repose la demi-sphère; il vient donc immédiatement à l'esprit de se servir de ce plan horizontal comme plan auxiliaire d'ombres portées. L'ombre du disque, sur le plan horizontal, se trouvera facilement. En effet, le cercle de base inférieure de ce disque portera ombre suivant un cercle dont le centre sera en O , obtenu en venant sur la verticale, puis sur l'horizontale, des longueurs des à la cote de hauteur du centre du cercle. Mais le disque est

tangent à la sphère ; le point O_1 sera donc sur la ligne à 45° , menée par O et sur la tangente horizontale au grand cercle de base de la sphère, menée par o''_1 .

Fig. 3.



Prenons $a''_1 o''_1$ égal à l'épaisseur du disque. Menons l'horizontale $o''_2 O_2$ et nous aurons le centre du deuxième cercle d'ombre

On les reliera par les deux tangentes communes, et l'on aura l'ombre portée sur le plan horizontal par le disque.

9. OMBRE PORTÉE PAR LA DEMI-SPHÈRE SUR LE PLAN HORIZONTAL.

Cette ombre sera une ellipse, puisque la ligne d'ombre propre est un cercle. L'un de ses axes s'obtiendra en cherchant l'ombre portée par le diamètre horizontal fe . Ces deux points étant dans le plan horizontal sont à eux-mêmes leurs ombres portées.

Prenons le point le plus haut h , et cherchons son ombre portée.

A cet effet, d'après la méthode des plans sécants, prenons le plan sécant oh et rabattons sur le côté, la section qu'il fait dans la sphère et dans le disque. Il coupe la sphère suivant un grand cercle rabattu suivant le cercle de base de la sphère. Le rayon lumineux se rabat à l'angle φ . Menons donc le rayon φ tangent en h'' , et nous aurons en h'' relevé en h le point le plus haut de l'ombre propre, et en h_2 , point où il coupe la ligne oh , l'ombre portée par le point h sur le plan horizontal.

L'ellipse d'ombre portée se tracera facilement, puisque l'on connaîtra son petit axe ef et son demi-grand axe Oh_2 .

10. POINT LE PLUS HAUT DE L'OMBRE PORTÉE PAR LE DISQUE SUR LA SPHÈRE.

Le même plan sécant nous le donne.

Le point d du disque se rabat en d'' ; je mène par d'' le rayon φ jusqu'en d''_1 , où il rencontre le grand cercle de section faite dans la sphère par le plan sécant, d''_1 relevé sur Od , d' donne le point demandé.

On aurait un point quelconque de l'ombre portée en menant un autre plan sécant quelconque et opérant comme pour ce dernier.

Nous chercherons seulement les deux points extrêmes ou points limites, c'est-à-dire ceux donnés par les plans sécants tangents au cercle de base du disque et les deux points de perte.

11. POINTS LIMITES.

Menons le plan sécant z , tangent au cercle de base du disque, et rabattons la section qu'il fait dans la sphère et dans le disque.

Nous avons fait comme ci-dessus le rabattement du petit cercle suivant lequel il coupe la sphère. Ce plan ne fait que toucher le disque au point z , rabattu en z'' à la hauteur à laquelle le disque est au-dessus du plan horizontal, hauteur égale au rayon de la sphère.

Le rayon φ , mené par le point z'' ne coupe pas le cercle. Nous en concluons que le point z ne porte pas ombre sur la sphère. En effet, regardons l'ombre sur le plan horizontal. L'ombre du point z du disque tombe en z_2 , hors de l'ombre portée par la sphère.

Remarque 1. On conçoit facilement que, suivant la dimension plus ou moins grande du disque, le rayon φ que nous venons de mener pourra rencontrer le petit cercle, lui être tangent ou rester en dehors. Dans le cas actuel, le disque est assez grand, et la rencontre n'a pas lieu.

Remarque 2. L'autre point limite, s'il existait, serait symétrique du précédent par rapport au plan de symétrie à 45° .

12. POINTS DE PERTE.

Aux points de perte, l'ombre portée du disque se rencontre avec l'ombre propre de la sphère; prenons les ombres portées sur le plan horizontal. L'ombre de la sphère rencontre en g_2 et v_2 l'ombre du cercle de base inférieure du disque. Les deux points g_2 et v_2 , relevés en g_1 et v_1 sur l'ombre propre de la sphère, donnent les deux points de perte.

Sur ces deux points, la courbe d'ombre est tangente au rayon lumineux.

Vérification. Si, ces points une fois trouvés, on menait le plan sécant qui passerait par eux, le rayon lumineux φ mené par le point correspondant du disque devrait, après rabattement, être tangent au petit cercle de section faite dans la sphère.

13. ÉPURE DE LA FIGURE 2, PLANCHE 8.

On reconnaîtra, facilement, que la figure 2 de la planche 8 est une application des questions que nous venons de traiter. On fera séparément l'épure en projection verticale en se servant du plan auxiliaire à 45° , et celle en projection horizontale, en se servant de l'ombre portée sur le plan horizontal et des plans sécants; comme vérification, les points correspondants des deux épures seront sur les mêmes lignes de rappel.

14. OMBRE PORTÉE DANS UNE DEMI-SPHÈRE CREUSE, PAR SON CERCLE DE BASE.

(Fig. 4, planche 8. Texte.... fig. 4.)

Nous avons déjà dit que cette ombre était une courbe plane et, par conséquent un cercle projeté suivant une ellipse.

15. CETTE OMBRE EN PROJECTION HORIZONTALE.

Points de départ ou d'origine.

Nous savons qu'aux points de départ, le rayon lumineux doit être tangent à la sphère. Or, un cylindre qui serait circonscrit à la sphère suivant son cercle de base, aurait ses deux plans tangents déterminés par les deux tangentes à 45° , tt_2 , uu_2 ; aux deux points t et u les rayons lumineux sont donc tangents et ces deux points sont les points de départ.

Point le plus bas.

Si nous prenons le plan de symétrie à 45° pour plan sécant et si nous rabattons la section obtenue nous reproduirons les deux demi-cercles $o''K''$, $o''Q''$... Le rayon φ mené par le point $o''K''$, recoupe le cercle intérieur de section en K'' , qui relevé en K_1 donne le point le plus bas, situé sur le plan de symétrie à 45° .

L'ellipse d'ombre portée a pour grand axe la ligne tu et pour demi-petit axe la ligne OK_1 . Elle est donc facile à tracer avec la bande de papier ou avec les échelles.

Remarque pratique. — En faisant l'épure avec soin et prenant des mesures, on reconnaîtra que le petit axe de cette ellipse est sensiblement le tiers du rayon $\left(\frac{1}{3} R\right)$ ce qui peut être utile à connaître quand on voudra trouver rapidement cette ombre portée.

On désigne quelquefois cette épure : *ombre de l'écuelle*.

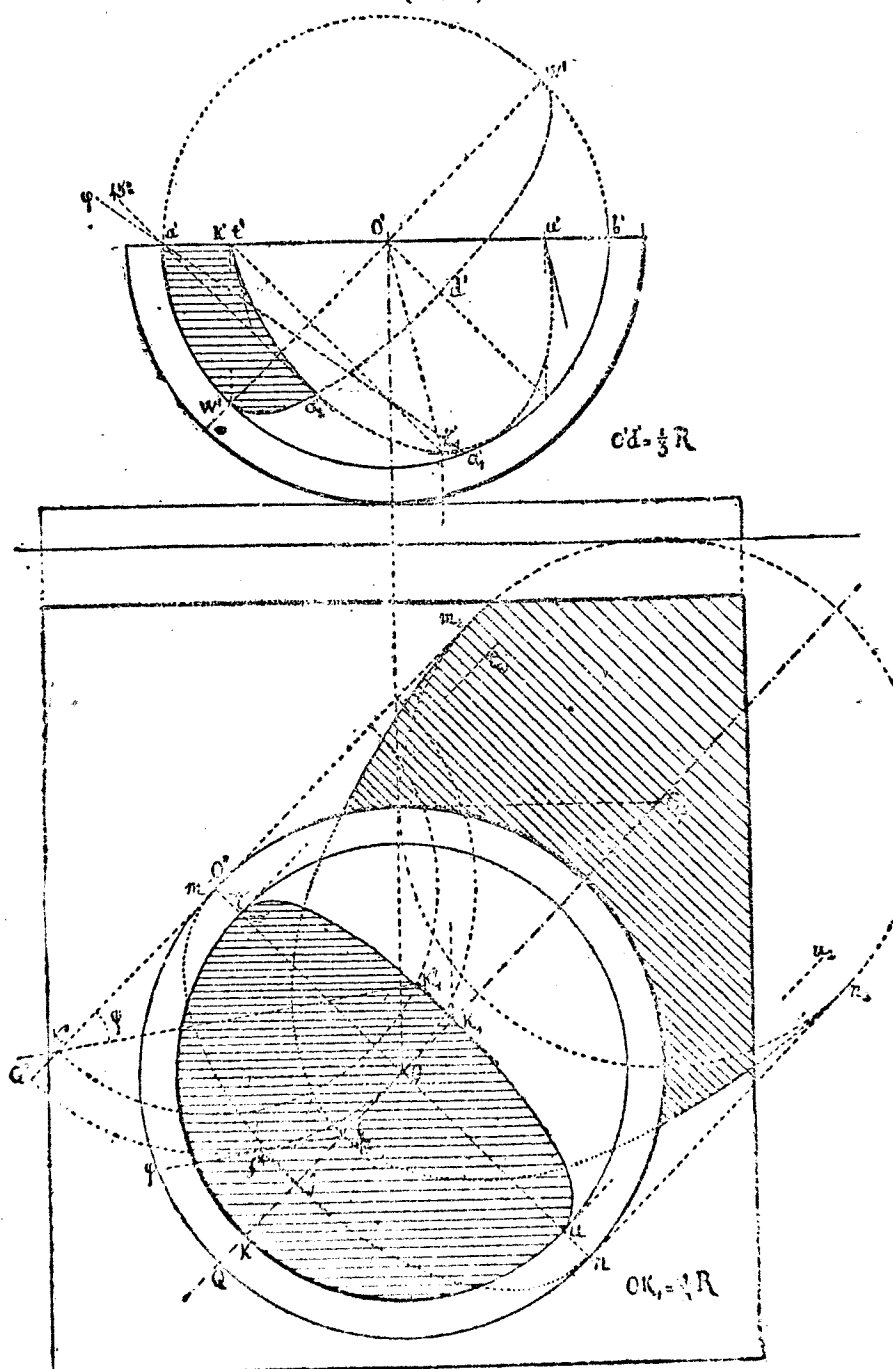
16. OMBRE PORTÉE SUR LE PLAN HORIZONTAL.

Cette ombre portée se composera : 1° de l'ombre de la sphère extérieure ; 2° de l'ombre du cercle horizontal qui la limite à la partie supérieure.

Commençons par ce dernier.

Son centre O porte ombre en O_2 , à 45° à droite et en arrière

(Fi. 4.)



du point O , à une distance égale à la cote de ce point, c'est-

à-dire au rayon de la sphère extérieure. On a donc obtenu O_2 en menant les deux tangentes au cercle de base de cette sphère.

Du point O_2 comme centre traçons un cercle m_2n_2 égal au grand cercle extérieur de base de l'écuelle et nous aurons l'ombre portée par ce grand cercle.

Pour avoir l'ombre portée par la sphère, reprenons le plan sécant à 45° KO. Menons à la section rabattue, la tangente $f''f_2$ à l'angle φ — f'' est un point de l'ombre propre de la sphère extérieure. Ce point porte ombre en f_2 sur le plan horizontal.

Si nous relevions f'' en f , et si nous tracions la demi-ellipse mnf (ponctuée, car elle est cachée), nous aurions en projection, l'ombre propre extérieure de l'écuelle. Les points m et n portent ombre en m_2 et n_2 sur le plan horizontal. f porte ombre en f_2 ; donc, les deux points m_2n_2 et f_2O_2 définissent les axes de l'ellipse d'ombre portée. On la tracera, à l'aide de la bande de papier, sur les deux droites o_2m_2 , et o_2f_2 comme demi-axes.

17. ÉPURE EN PROJECTION VERTICALE.

En projection verticale (fig. 3, planche 8) et (fig. 4 du texte), l'écuelle est coupée par un plan de front : nous ne voyons donc que le quart de la sphère.

Nous aurons deux ombres portées.

1° L'ombre du demi-cercle horizontal d'équateur ;

2° L'ombre du demi-cercle de front.

Cherchons d'abord la première, comme si le cercle de base de la sphère était complet.

Points d'origine. Ce sont les deux points t' et u' à 45° sur le cercle de base. On les aura soit en prenant les $3/10$ du rayon, soit en menant au cercle méridien de la sphère les deux tangentes à 45° et projetant les points de tangence sur l'équateur.

Point le plus bas. Prenons le point K' situé à 45° , à gauche sur l'équateur. Par une rotation, amenons-le en a' , menons le rayon φ jusqu'à la rencontre en a'_1 avec le méridien principal, puis ramenons le point a'_1 à 45° , soit en prenant les $3/10$ du rayon de son parallèle, soit en menant du point K' la ligne à 45° $K'K'_1$, jusqu'à ce parallèle et nous aurons en K'_1 le point le plus bas.

La tangente y est horizontale ; par conséquent les deux droites $o'K'_1$ et $t'o'u'$ sont deux diamètres conjugués de l'ellipse ; on pourra la tracer à l'aide des échelles.

De plus, menons par les deux points d'origine t' et u' , deux

droites parallèles à $o'K'_1$ et nous aurons les tangentes en ces points.

18. OMBRE PORTÉE PAR LE DEMI-CERCLE DE FRONT.

Si le cercle de front était complet, et s'il existait seule, l'ombre qu'il porterait en projection verticale serait la même que celle que nous venons d'obtenir en projection horizontale. Prenons en w' le point de tangence à 45° .

Prenons sur le rayon lumineux du centre une longueur $o'd$ égale à $1/3$ du rayon, et nous aurons les deux demi-axes de l'ellipse d'ombre.

19. POINT DE BRISURE.

Les deux ellipses d'ombre se rencontrent au point de brisure a'_2 , qui est évidemment l'ombre du point saillant a' . — Donc, comme vérification, le point de brisure doit être sur la ligne à 45° issue du point a' . Au point a' de l'espace, la tangente à l'équateur est parallèle au plan vertical ; cette tangente porterait ombre à 45° sur la sphère. Donc, au point de brisure, la tangente à l'ellipse d'ombre portée par l'équateur est une ligne à 45° .

20. ÉPURE DE LA FIGURE 3 DE LA PLANCHE 8.

Cette épure est une application immédiate de ce que nous venons de dire sur la sphère creuse.

Il est inutile de l'expliquer davantage. On fera séparément l'épure en plan et en élévation, et les points correspondants devront se trouver sur une même ligne de rappel.

21. LAVIS DES DEUX SPHÈRES.

On trouve les lignes de teintes comme nous l'avons montré, planche 5, pour la sphère. On se servira de l'échelle n° 1 pour trouver les points des lignes de teintes sur l'équateur ; des échelles 2' et 4' pour les points situés sur les grands cercles à 45° ; de l'échelle 15' pour déterminer les points sur le contour apparent. On joindra par des courbes les points ainsi trouvés et numérotés de même, et l'on dessinera au crayon, très-légèrement, les ellipses de teintes.

On remarquera que, sur la figure 2, planche 8, la sphère étant

en saillie, on emploiera les échelles droites, et sur la figure 3 les échelles renversées.

On fera le lavis comme à l'ordinaire; on passera successivement la teinte d'ébauche, les teintes d'ombre propre, les teintes de couleur et celles d'ombres portées.

Les objets figurés sur cette planche sont supposés être en fonte.

22. TRAVAIL DES ÉLÈVES.

Pour la prochaine leçon, les élèves feront au crayon seulement le tracé des ombres (fig. 2 et 3). Les lignes d'ombres propres ou portées seront passées à l'encre très-pâle.

Puis, le coup de gomme élastique sera donné avec précaution pour ne pas érailler le papier; après quoi, les lignes de teintes seront faites au crayon, très-légèrement, immédiatement avant de commencer le lavis.



13^e LEÇON.

OMBRES ET LAVIS DES TORES SIMPLES ET EN RELIEF.

1. Nous avons déjà montré, planche 5 et 5^e leçon, n° 14, comment, à l'aide des échelles de teintes, il était possible de tracer sur les principaux parallèles d'une surface de révolution des points par lesquels devront passer les lignes d'égale teinte. Nous allons en faire une nouvelle application, très-complète, aux tores pleins ou creux, à profils simples ou composés, et dans des positions différentes.

Dans cette leçon, nous ferons cette étude sur un tore en relief ayant les dimensions suivantes :

Parallèle minimum 60^{mm} de diamètre.

Parallèle maximum 140 id.

Cercle générateur 40 id.

Nous chercherons :

1° Les lignes d'ombres propres réelles ou virtuelles (ce seront les lignes de teintes n° 0).

2° Les lignes d'ombres portées, soit par la courbe d'ombre propre (ombre autoportée), soit par les lignes de coupe quand nos tores seront coupés ;

3° Les lignes d'égales teintes.

2. LIGNES D'OMBRES ET DE TEINTES EN PROJECTION HORIZONTALE.

Soit (fig. 1) un tore plein, en plan, élévation et coupe. Cherchons d'abord les lignes de teintes sur le plan. Nous savons trouver la ligne d'ombre propre (3^e leçon) ; d'ailleurs, l'emploi de nos échelles de teintes nous donnera cette ligne d'ombre propre comme ligne de teinte n° 0.

Un tore peut être considéré comme engendré, soit par un cercle, soit par une sphère mobile dont il serait l'enveloppe.

Figurons au centre O , une sphère égale à la sphère génératrice, c'est-à-dire ayant 40^{mm} de diamètre, et traçons sur elle les lignes de teintes qui lui conviennent. On sait comment se fait ce tracé à l'aide des échelles. (On se servira des échelles des corps mi-polis.) Plaçons maintenant cette sphère dans le tore, en l'y inscrivant. Quelle que soit la position qu'elle occupe, elle se raccordera avec le tore, tout le long d'un de ses grands cercles à elle, projeté horizontalement en ligne droite. Dans les positions I, I, I, I , le grand cercle sera projeté suivant les droites $mI, mI, \dots$

Relevons sur la sphère centrale les points d'intersection $0, 1, 2, \dots \bar{1} \bar{2}, \dots$ sur les diamètres $m'm' - m'm'$, dont les droites précédentes sont le prolongement. Reportons ces points sur les droites mI, mI et nous aurons autant de points des courbes de teintes.

Remarque. On voit facilement que ces points eussent été donnés en se servant de l'échelle n° 1'. (Cylindres parallèles aux arêtes du cube). Plaçons la sphère dans les deux positions II, II . Elle se raccorde avec le tore suivant le diamètre nII, nII .

Relevons sur la sphère centrale les points d'intersection $0, 1, 2, \dots \bar{1} \bar{2}, \dots$ situés sur le diamètre $n'n'$ dont les deux lignes précédentes sont les prolongements, reportons ces points sur ces lignes et nous aurons de nouveaux points des courbes de teintes.

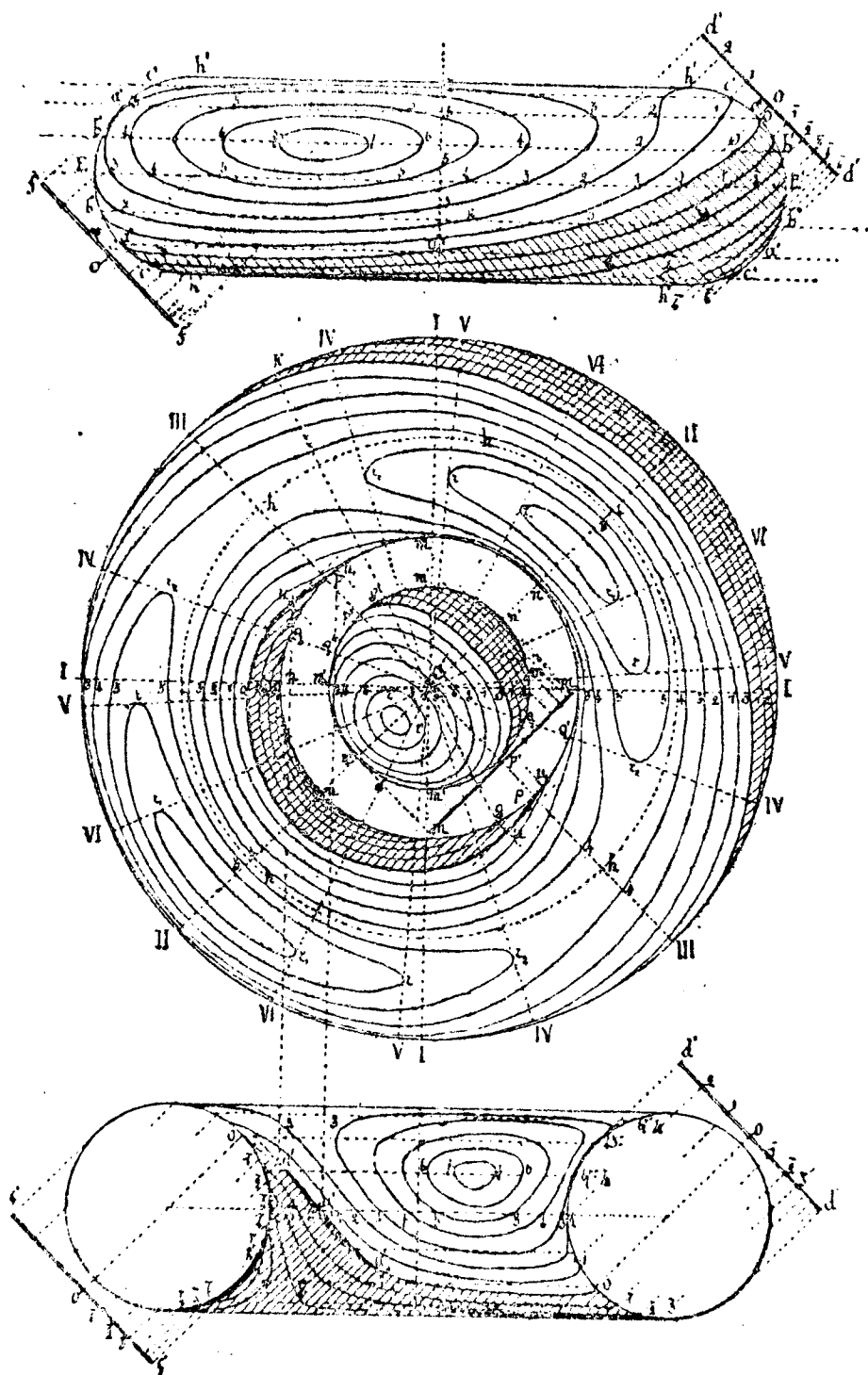
Remarque. L'échelle n° 2' aurait donné directement ces points.

De même, nous placerons la sphère dans les deux positions III , et nous prendrons en $p'p'$ sur la sphère centrale les points de division qu'il faudra reporter sur les lignes $pIII, pIII$. Ces points eussent été donnés directement par l'échelle n° 4'.

3. POINTS DES COURBES SITUÉS SUR UN MÉRIDIEN QUELCONQUE.

Nous n'avons obtenu ainsi, sur le plan, que les points situés sur le méridien principal, de profil et à 45° ; mais il est facile de voir que si nous prenons un méridien quelconque $oq'IV$, la sphère inscrite le long de ce méridien, toucherait le tore suivant les lignes droites qIV, qIV . Prenons le diamètre $q'q'$ de la sphère centrale dont la droite IV, IV est le prolongement, relevons les points de division sur la ligne $q'q'$ et reportons-les sur les deux autres, et nous aurons des points de nos courbes. Nous aurons

Fig. 1.



donc ainsi avec la plus grande facilité, autant de points en projection horizontale que nous en voudrons.

4. DÉTERMINATION DES SOMMETS.

On remarquera que les courbes 5, 6, 7 possèdent des points saillants ou sommets. Il est important de les déterminer directement. Reprenons la sphère centrale, et du centre essayons de mener des tangentes aux ellipses de teintes ; nous reconnaitrons que les courbes 5, 6, 7 de la sphère sont les seules pour lesquelles nous puissions le faire. Menons, par exemple, la tangente vr' à la courbe n° 6 de la sphère, Prolongeons jusqu'au tore en Vr des deux côtés. Cherchons, comme ci-dessus, les points des courbes qui seraient situés sur les lignes rv du tore. Il faudrait relever, sur la sphère centrale, les points situés sur la ligne rr' et les reporter sur les deux autres.

Mais, sur la sphère centrale, la courbe n° 6 ne donne qu'un seul point, donc il devra en être de même sur le tore ; et la courbe n° 6 sur le tore devra être tangente à la ligne Vr , précisément au point vr , transport du point de tangence r' de la sphère centrale.

Il en sera de même pour les deux autres tangentes aux ellipses n° 5 et n° 7. Elles donneront les tangentes aux courbes n° 5 et n° 7 du tore.

5. POINTS SUR LES CONTOURS APPARENTS.

Prenons les points où les ellipses de la sphère centrale se perdent dans son contour apparent. Soit g' le point de contour apparent de l'ellipse n° 1 ; menons og' et prolongeons de chaque côté jusqu'aux contours apparents du tore, nous aurons en g , sur le contour intérieur et en K , sur l'autre, les points demandés.

Remarque. On aurait pu déterminer directement ces points en se servant de l'échelle n° 15', comme nous l'avons indiqué dans la 5^e Leçon (parag. 16.)

Dans le cas actuel, nous n'opérons pas ainsi. Sur la sphère centrale, les points de contour apparent ont été donnés par l'échelle n° 15'. Nous nous en servons alors comme il vient d'être dit pour les points g et K .

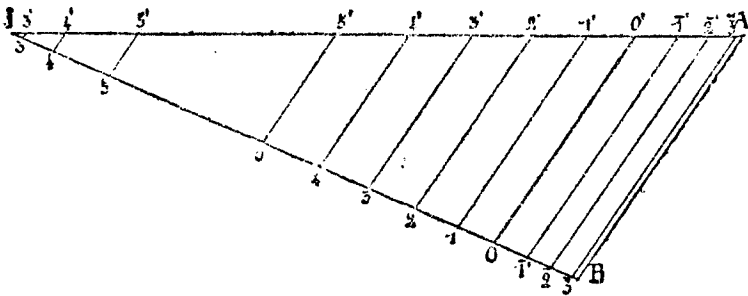
G. LIGNES D'OMBRE ET DE TEINTES EN ÉLEVATION.**A. Points sur l'équateur.**

Si nous menons l'équateur $E'E'$, un cylindre qui serait circonscrit au tore suivant cet équateur serait dans la position indiquée, échelle n° 1'. Nous prendrons nos points sur cette échelle, et nous les reporterons en $E'E'$, aux points 0, 1, 3, 1 2 3...

Remarque. La ligne $E'E'$ ayant 140^{mm} , notre échelle, qui n'a que 120^{mm} au maximum sera trop courte.

Nous ferons le relevé des points de deux manières :

(Fig. 2.)



1^{re} manière : On tracera un angle quelconque AIB. On prendra $IB = 120$, et $IA = 140$. Sur IB on reportera les points de l'échelle, en 0, 1, 2... On joindra BA; par les points de division on mènera des parallèles à BA, et l'on aura en $0', 1', 2'$, sur la ligne IA, les points de division cherchés.

2^e manière : On prendra une bande de papier égale à la moitié de $E'E'$. Alors elle pourra s'inscrire dans l'échelle. On l'y placera, on pointera les points de rencontre, et quand on fera le report sur la ligne $E'E'$, au lieu de porter les divisions simples, on les portera en les doublant.

B. Points sur des parallèles.

On mènera les deux parallèles à 45° $a'a'$, $a''a''$. On pourrait circonscire au tore deux cônes, suivant ces parallèles. L'un, à 45° , pointe en haut (échelle n° 9); l'autre, à 45° , pointe en bas (échelle n° 11). On relèvera sur les deux échelles correspon-

dantes, les points de division et on les reportera sur les deux parallèles $a'a'$ et $a''a''$.

On aura de la même manière des points sur les deux parallèles $b'b' - b''b''$ (cônes à $22^\circ 1/2$, pointe en haut et pointe en bas, échelles 6' et 8'), ainsi que sur les parallèles $c'c' - c''c''$ (cônes à $67^\circ 1/2$, pointe en haut et pointe en bas, échelles 12' et 14').

C. Points sur le contour apparent.

En élévation le contour apparent est formé de deux demi-cercles réunis par deux tangentes horizontales. Ces contours étant circulaires, nous pouvons leur appliquer l'échelle n° 15 qui donne les points sur les contours apparents circulaires.

Pour le demi-cercle de droite plaçons en $d'd'$, à 45° , une échelle sur laquelle nous aurons projeté le cercle de contour apparent. Inscrivons la droite ainsi obtenue dans l'échelle n° 15', reportons les points sur la ligne $d'd'$, en 0 1 2... $\overline{1} \overline{2}$... et ramenons, par des lignes à 45° , ces points sur le cercle de contour apparent, nous aurons les points cherchés (voir 5^e Leçon, n° 16).

Pour le demi-cercle de gauche, nous ferons de même avec notre échelle placée en $f'f'$.

En tous ces points, les courbes doivent se raccorder tangentiellement avec le contour apparent.

7. REMARQUES.

Considérons, en projection horizontale, le cercle h (tracé en trait pointillé sur l'épure), situé à égale distance des deux contours apparents.

En élévation, ce cercle se projette suivant les deux parallèles $h'h'$ (parallèle le plus haut) et $h''h''$ (parallèle le plus bas), lesquels forment contour apparent en projection verticale.

On remarquera facilement que le cercle hh ne coupe aucune ligne de teinte, et qu'il est situé, en plan, entre les courbes n° 4 et n° 5, c'est-à-dire dans la zone que nous avons définie, zone d'éclairage à saturation. En effet, un plan horizontal que l'on tenterait de poser sur le tore s'y appuierait tout le long de ce cercle h , et comme un pareil plan, vu d'en haut, paraîtrait éclairé à saturation, il doit en être de même du cercle h , et de la zone qui lui est contiguë. En élévation, la droite $h'h'$, projection du cercle h ne doit pas, non plus, recouper aucune des courbes. En effet, les rayons qui frappent le tore en un quel-

conque des points de ce cercle rencontrent, tous, la surface sous la même incidence : ce cercle doit donc être partout également brillant, et ses points doivent tous, sinon appartenir à une même ligne de teinte, du moins se maintenir entre deux mêmes lignes de teintes.

En élévation, le parallèle supérieur $h'h'$ se maintient entre les deux lignes 2 et 3, et le parallèle inférieur, $h''h''$, entre les deux courbes $\bar{3}$ et $\bar{4}$.

Nous trouverons souvent des lignes analogues aux cercles hh et $h''h''$, séparant ainsi les lignes de teintes en deux séries. Nous les nommerons des *lignes de démarcation*.

Il est facile de voir que, toutes les fois qu'une surface sera susceptible de se raccorder tangentiellement avec un plan, comme un plan reçoit en tous ses points la lumière sous la même incidence, il doit être partout teinté de même (1). Par conséquent, la ligne de raccordement de la surface et du plan sera nécessairement une ligne de *démarcation*.

8. LIGNES D'OMBRE ET DE TEINTES, EN COUPE.

Nous procéderons comme ci-dessus, pour trouver en coupe les points de nos courbes situés 1° sur l'équateur ; 2° sur les parallèles à 45° ; 3° sur les parallèles à $22^\circ \frac{1}{2}$ et à $67^\circ \frac{1}{2}$; 4° sur les demi-cercles de contours apparents. Seulement nous ferons attention d'appliquer nos échelles renversées, car les cônes et les cylindres de raccordement, dans ce cas, seraient creux.

Ayant ainsi, sur toutes nos projections, un grand nombre de points, numérotés avec soin, nous joindrons par des traits continus les points marqués des mêmes numéros. Nous aurons soin de faire nos courbes sans jarrets, et bien tangentes aux contours apparents.

9. OMBRE AUTOPORTÉE.

Nous savons que l'ombre autoportée commence au point de passage u' que nous avons déterminé en menant la tangente à 45° à la courbe n° 0 d'ombre propre.

Son tracé rigoureux serait trop difficile à comprendre pour que nous l'expliquions. Nous prendrons pour cette ligne

(1) Sauf pour les parties fuyantes.

d'ombre une courbe très-peu accentuée $u'u_1u_2$ partant du point de passage u' avec tangente à 45° , rencontrant l'équateur en u_1 , et venant se perdre dans la partie inférieure de l'ombre propre en u_2 avec une tangente à 45° , puisque, à un point de perte, la tangente est toujours le rayon lumineux. Pour avoir l'ombre autoportée en plan, on relèvera par une ligne de rappel le point u'_1 en u_1 sur l'équateur, et on mènera le petit arc de courbe uu_1 . Il est tangent à 45° en u d'après le théorème sur les points de passage. Il est tangent en u_1 au petit cercle de contour apparent.

Sur le croquis ci-contre (Texte, fig. 1) nous avons mis une teinte plus noire sur la petite portion occupée en dehors de l'ombre propre, par cette ombre autoportée.

On remarquera combien peu l'ombre autoportée diffère de l'ombre propre intérieure ; et cependant, dans l'exemple choisi, la sphère génératrice était assez grosse comparativement au vide intérieur du tore. Plus le tore sera aplati, c'est-à-dire plus la sphère génératrice sera petite, comparée aux dimensions du tore, et moins l'ombre autoportée différera de l'ombre propre ; c'est pourquoi, le plus souvent, on ne s'inquiète pas de son tracé.

10. TORES DE PETITES DIMENSIONS. (TRACÉ SIMPLIFIÉ DES COURBES D'OMBRE ET DE TEINTES.)

Lorsque le cercle qui engendre le tore est de petites dimensions, il serait presque impossible, et d'ailleurs inutile, de tracer avec autant de précision les lignes d'ombre et de teintes.

Remarquons (fig. 3) qu'il importe surtout de bien faire sentir les deux points brillants et les deux lignes noires d'ombre propre ; la courbe d'ombre autoportée sera tout à fait négligée.

La courbe d'ombre intérieure doit passer par le point y , lequel est très-sensiblement aux $\frac{2}{5}$ du rayon (voir 2^e leçon, ombre propre de la sphère). De même, l'ombre extérieure doit passer par le point m , situé aussi aux $\frac{2}{5}$ du rayon, et, de plus, ces deux lignes d'ombre sont presque des cercles.

Prenons un point O_1 situé sur la ligne à 45° du point O , et tel que $\overline{OO_1} = \frac{2}{5} R$. (R étant le rayon du cercle générateur du tore.)

Du point O_1 comme centre décrivons deux demi-cercles, ayant pour rayon ceux du petit et du grand équateur, et nous aurons très-sensiblement, les deux courbes d'ombres propres.

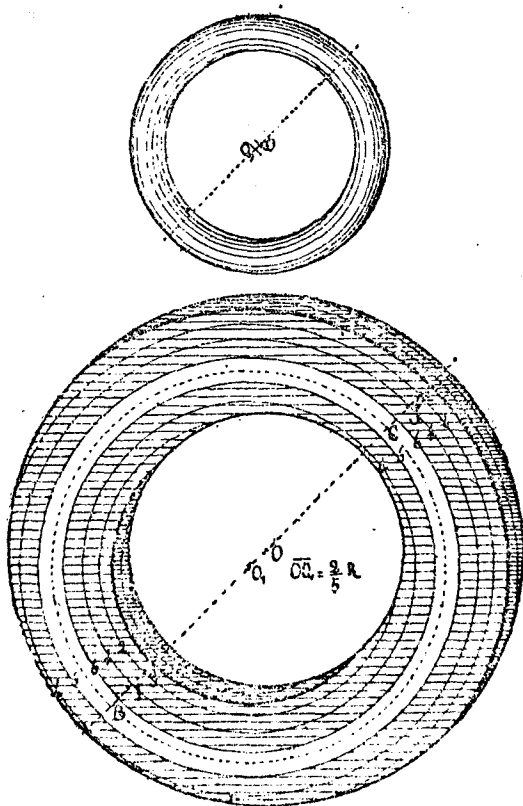
Remarquons, en outre, que dans une sphère mi-polie, le point brillant est à une distance du centre égale aussi aux $\frac{2}{5}R$, environ de R .

Soient B et C les deux points qui seraient à une distance égale à $\frac{2}{5}R$, des points milieux I et J .

Un cercle qui passerait par B et C aurait aussi son centre au point O_1 .

Cela posé, entre le point B et le point y , nous avons pris trois

Fig. 3.



points, divisant au jugé la distance By , comme le feraient sur la sphère les teintes 2, 4 et 6.

Nous avons porté la même division entre les points c et m , et finalement, du point O_1 comme centre nous avons tracé des

arcs de cercles ou des cercles complets, concentriques, qui seront nos courbes de teintes.

Nous en avons 3 au lieu de 7, parce que, lorsqu'un tore est petit, il faut diminuer le nombre de teintes. Lorsque nous ferons le lavis, nous passerons deux fois dans les mêmes zones.

Ce tracé n'est pas rigoureux.

Au lieu de deux points brillants en B et C, il donne une ligne brillante continue (la ligne comprise entre les cercles n° 5 et n° 6). Mais pour un dessin à petite échelle, ou pour les tores dont le cercle générateur est très petit, il donne un effet satisfaisant ; il a l'avantage d'être très-simple à exécuter et très-rapide. Nous l'utiliserons souvent dans le dessin de machines. En élévation et en coupe, la seule simplification à apporter consiste à réduire le nombre des courbes et à en prendre 3 au lieu de 7. On devra toujours commencer par marquer la zone brillante, au jugé, et la courbe d'ombre propre, passant par les deux points de tangence à 45° ; entre les deux, on tracera, de sentiment, deux courbes de séparation, n° 2 et n° 4.

On se rappellera, qu'en élévation, la droite horizontale, qui forme le contour apparent supérieur, est ce que nous avons nommé une ligne de démarcation, comprise entre les courbes 2 et 3 ; par conséquent, la courbe n° 2 que nous tracerons devra se perdre dans le contour apparent, tandis que la courbe 4 ne le rencontrera pas, et se fermera sur elle-même.

11. LAVIS.

Revenons aux tores qui font l'objet de la planche 9.

Les courbes d'ombres et de teintes étant tracées, on fera le lavis comme pour une sphère. Nous aurons comme toujours :

La teinte d'ébauche n° 0, sur tout ce qui est dans l'ombre propre ou portée.

La teinte n° 1, contre les lignes $+1$ et $\bar{1}$.

n° 2, id. $+2$ et $\bar{2}$, etc....

Les teintes de couleurs, et finalement les teintes d'ombres portées. Dans le lavis des figures 1, 2 et 3 de la planche 9, nous n'avons pas d'ombre portée sur des portions qui sans ombres, eussent été éclairées. Nous n'aurons recours qu'à une seule teinte d'ombre portée, qui sera la teinte n° 10, la plus faible et la dernière.

Sur les figures 4, 5, 6, nous aurons, au contraire, des ombres portées avec leur maximum d'intensité.

12. NATURE DES MATÉRIAUX.

Les tores de la planche 9 seront en bronze.

13. TRAVAIL DES ÉLÈVES.

Pour la prochaine leçon, les élèves feront au trait et au lavis les figures 1, 2 et 3 de la planche 9.

Les cadres et tous les titres extérieurs de la planche devront également être achevés.

Enfin, ils exécuteront aussi les petits tores qui se trouvent sur la même planche, à gauche, en employant le tracé simplifié, donné au n° 10 de cette leçon.

14^e LEÇON

OMBRES ET LAVIS DES TORES CREUX.

1. DEMI-TORE CREUX EN PROJECTION HORIZONTALE (planche 9, fig. 4), (texte, fig. 1).

Reprenons un tore ayant les mêmes dimensions que celui de la leçon précédente.

Supposons seulement qu'il soit creux et que nous l'ayons coupé par le plan de ses équateurs.

Cherchons :

- 1^o La ligne d'ombre propre et les lignes de teintes ;
- 2^o Les ombres portées dans son intérieur par les deux cercles d'équateurs que détermine le plan de coupe.

2. LIGNE D'OMBRE PROPRE ET LIGNES DE TEINTES.

Appliquons nos échelles comme nous avons fait dans la 13^e leçon, seulement plaçons-les renversées et non pas droites.

Dans les positions I, nous emploierons l'échelle n^o 1' renversée.

Dans les positions II, l'échelle n^o 2' renversée.

Dans les positions III, l'échelle n^o 4' renversée.

Nous aurons les points sur les contours apparents, c'est-à-dire sur les deux équateurs, en nous servant de l'échelle 15' renversée.

Nous joindrons les points numérotés de même par des lignes continues, et nous aurons :

Pour les courbes n^o 0, les lignes d'ombres propres (réelles ou virtuelles).

Fig. 2



Fig. 1

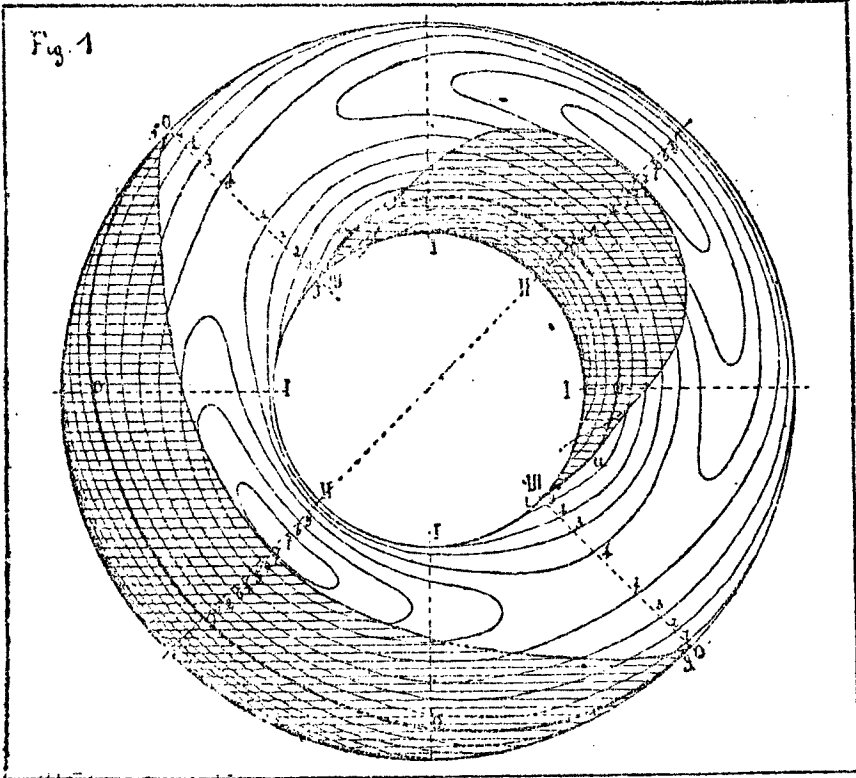
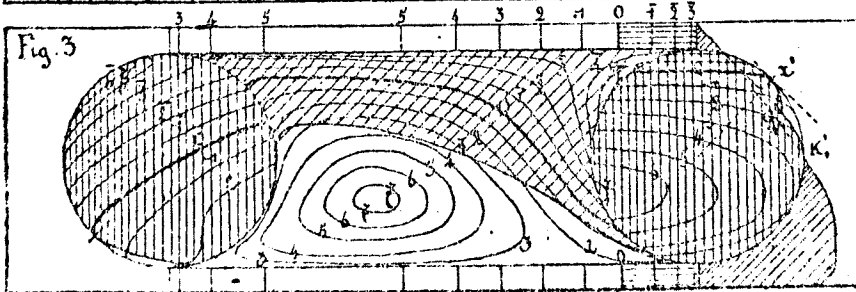


Fig. 3

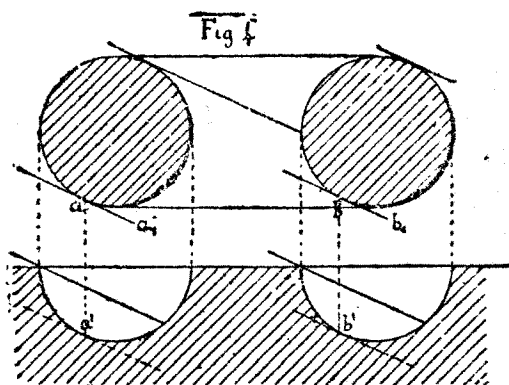


Pour les courbes 1, 2, 3,... $\bar{1}$, $\bar{2}$, $\bar{3}$,... les lignes d'égales teintes.

3. PARTIES RÉELLES ET VIRTUELLES DES COURBES D'OMBRE PROPRE.

Remarquons tout d'abord que le tracé que nous obtiendrons ainsi sera rigoureusement le même que celui du tore en relief, mais renversé.

Les élèves l'exécuteront donc facilement. Ils procéderont ainsi : sur une feuille de papier calque fort, ils décalqueront au crayon les courbes du tore plein (planche 9, fig. 1). Puis, ils retourneront le calque ainsi obtenu, et, se repérant bien sur le centre et sur la ligne de symétrie à 45° , ils placeront, du côté de l'ombre, ce qui (fig. 1, pl. 9) était du côté de la lumière, et



réciiproquement. Avec la pointe fine d'un crayon dur, ils repasseront, à l'envers, les courbes déjà dessinées, et le transport sur la feuille de dessin sera effectué.

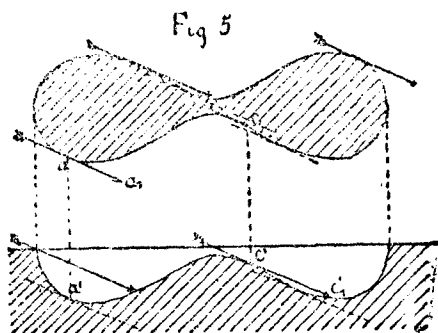
Les deux courbes n° 0 seront les lignes d'ombre propre; mais il est facile de voir que si elles continuent de rester lignes d'égale teinte, elles cessent, en certains points, d'être de réelles lignes d'ombre propre.

Partout où elles étaient réelles, dans le tore en relief, elles seront maintenant virtuelles, et inversement.

Ainsi; la grande ombre propre extérieure, qui jouait en réalité ce rôle sur le tore en relief, ne fait plus de même sur le tore en creux. Tout rayon lumineux qui y passerait a, a_1 serait, comme le font comprendre les coupes ci contre, noyé dans la masse solide conservée au dessous du creux formé par le tore. Il en serait de même pour un rayon bb_1 , qui dans le tore en relief, eût donné un point réel de l'ombre intérieure. Dans le cas actuel, il donnera un point virtuel b' .

Réciproquement, tout point c , (fig. 5), de l'ombre intérieure qui dans le tore en relief était virtuel sera en c' réel dans le tore en creux.

Ne nous occupons donc plus de la courbe extérieure n° 0. Elle ne sera plus pour nous qu'une courbe d'égale teinte.



Prenons (fig. 1) sur la ligne intérieure n° 0, les deux points de passage u , u , obtenus en lui menant des tangentes à 45° , dans la partie où elle est le plus renflée. Nous adopterons comme réelles, les deux petites portions de la ligne n° 0, comprise entre $iu...$ et $ju....$

Aux points de passage, commenceront les deux branches de l'ombre autoportée.

4. OMBRE PORTÉE PAR LE GRAND ÉQUATEUR.

Nous déterminerons les deux points d'origine sur l'équateur. Le point situé dans le plan de symétrie à 45° , et des points situés sur quelques parallèles équidistants.

5. POINTS D'ORIGINE (fig. 6).

De même que pour l'ombre portée par une demi-sphère dans son intérieur, les points d'origine sur l'équateur sont ceux pour lesquels le rayon lumineux serait tangent au tore.

Prenons les deux points de tangence à 45° , f et g , et nous aurons les points d'origine.

Comme ces points sont aussi sur le contour apparent, la courbe doit y être tangente à ce contour, c'est-à-dire, aussi, à la ligne à 45° .

6. POINT DANS LE MÉRIDIEN DE SYMÉTRIE A 45°.

Coupons la surface par le plan de symétrie, à 45°, et rabattons la section ainsi faite, autour de la ligne KS. Nous obtenons les deux demi-cercles $K''K''_1$ et $l''l''_1$. Menons par les points K'' et l'' le rayon φ , jusqu'à la rencontre en K''_1 et l''_1 avec le cercle ; ramenons ces points en K_1 et l_1 sur la ligne à 45°, KS, et nous aurons les points demandés.

Remarque pratique. Nous avons déjà fait une construction analogue à propos de l'ombre portée dans une sphère creuse, et nous avons montré que le point obtenu tombait environ au $\frac{1}{3}$ du rayon à partir du centre. On pourra donc, quand on ne pourra pas faire l'épure, prendre $tK_1 = \frac{1}{3}$ de R, ou $K_1S = \frac{2}{3}$

de R, c'est-à-dire, $\frac{1}{3}$ du diamètre.

Le point l_1 obtenu sur l'autre demi-cercle donnera le point analogue de l'ombre portée par le petit équateur.

7. POINTS SITUÉS SUR DES PARALLÈLES.

Nous procéderons comme nous avons fait pour avoir l'ombre portée, en projection horizontale, dans un cône, par son cercle de base.

Coupons le tore par une série de plans horizontaux équidistants, trois, par exemple. A cet effet, reprenons la coupe faite par le plan à 45° et rabattue et $K''K''_1$, $l''l''_1$. Entre l'équateur et le point le plus bas, menons deux plans sécants horizontaux, coupant le demi-cercle de section aux points 1'', 2'', 3'' relevés en 1, 2 et 3.

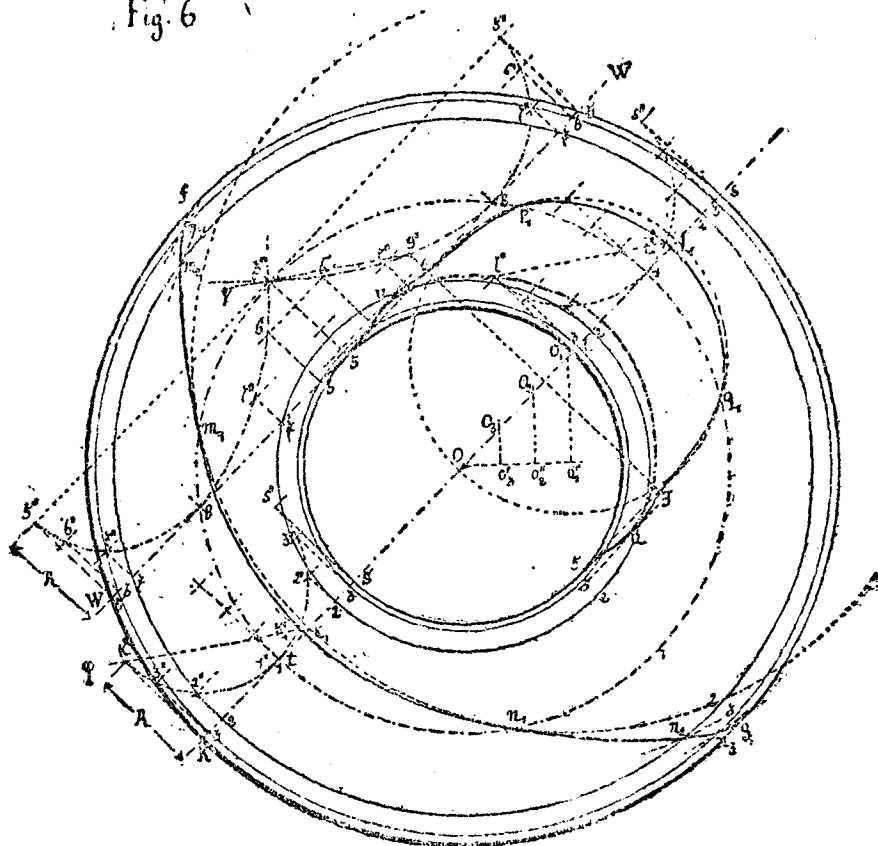
Les parallèles déterminés par ces plans, seront, y compris celui qui correspond au point inférieur, les cercles 1, 2 et 3.....

Employons la méthode des ombres portées : cherchons successivement les ombres portées sur les plans de ces parallèles par le grand cercle d'équateur.

A cet effet, par le centre de tore O, menons d'une part une ligne à 45°, de l'autre, une horizontale ; sur cette dernière, prenons trois points O''_1, O''_2, O''_3 situés aux distances auxquelles sont entre eux nos trois plans parallèles (on aura $OO''_1 = R$) ; par ces points menons des verticales jusqu'à la rencontre avec la ligne à 45°. Nous aurons en O_1, O_2, O_3 les ombres portées sur les

plans de nos trois parallèles par le centre de l'équateur. De O_1 comme centre, décrivons un arc de cercle égal à l'équateur. Il coupera le parallèle 1 aux deux points m_1n_1 qui seront des points de l'ombre.

Fig. 6



De même de O_2 , avec le même rayon décrivons un arc de cercle, qui recoupera en m_2n_2 le parallèle 2, et de O_3 l'arc de cercle qui recoupera en m_3n_3 le parallèle 3 ; joignons ces points par une courbe continue, en ayant soin, aux points d'origine, de la faire tangente au cercle d'équateur et au point sur le plan de symétrie, tangente en K_1 à la ligne à 45° qui est perpendiculaire au rayon lumineux.

Aux points m_1 et n_1 elle sera tangente au cercle $O_1m_1n_1$.

8. OMBRE PORTÉE PAR LE PETIT ÉQUATEUR.

On procédera exactement de même. Des points $O_1O_2O_3$ avec un rayon constant et égal à celui du *petit* équateur, on décrira

des arcs de cercle jusqu'aux rencontres avec les parallèles 1, 2 et 3 ; et l'on aura des points de l'ombre $p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3$. Ces deux derniers ne sont pas marqués sur l'épure, on verra plus loin pourquoi.

Le point sur le plan de symétrie à 45° est déjà déterminé. Aux points p_1q_1 , situés sur le parallèle inférieur, la courbe est tangente au cercle auxiliaire $O_1p_1q_1$.

9. RENCONTRE DE L'OMBRE AUTOPORTÉE ET DE LA PRÉCÉDENTE, POINTS D'ORIGINE.

Prenons le plan sécant à 45° , WW qui serait tangent au petit équateur ; cherchons la courbe suivant laquelle il coupe le tore et rabattons-la sur le côté.

Puisque nous avons trois parallèles de la surface et l'équateur en plus, nous avons en 5, 6, 7, 8..., en projection horizontale, des points de la courbe dont nous connaissons les hauteurs au-dessus du plan horizontal.

Les trois points 5, 5, 5 se rabatteront à une hauteur égale au rayon R en $5'', 5'', 5''$.

Les quatre points 6, 6, 6, 6 se rabatteront en $6'', 6'', 6'', 6''$ à une hauteur égale aux $\frac{2}{3}$ de R.

Les quatre points 7, 7, 7, 7, à $\frac{1}{3}$ de R, en $7'', 7'', 7'', 7''$.

Les deux point 8, 8, resteront sur la charnière.

Joignons ces points, et nous obtiendrons la moitié de la coupe qui eût été faite si le tore eût été entier.

Par le point $5''$, rabattement du point de tangence à 45° du petit équateur, menons le rayon φ . Il recoupe la courbe de section en $9''$, relevée en 9. C'est en ce point que commence, en réalité, l'ombre portée par le petit équateur ; et c'est précisément le point 5 de ce dernier qui porte ombre en 9.

Mais, le point 5 est aussi un point de la courbe d'ombre propre intérieure, et par suite, le point 9 appartient à l'ombre autoportée ; c'est donc le point de rencontre des deux ombres. Pour la courbe d'ombre portée, c'est en réalité un de ses points d'origine. L'autre est symétrique.

10. TANGENTE AU POINT DE RENCONTRE DES DEUX OMBRES.

Au point 5, la tangente au petit équateur serait une ligne

à 45° , située dans le plan projetant d'un rayon lumineux. Elle donnerait, si elle était seule, une ombre portée sur le tore, qui serait la trace à 45° de son plan d'ombre portée ; donc, au point de rencontre 9, l'ombre autoportée et l'ombre portée sont toutes deux tangentes à une ligne à 45° .

On remarquera, pour en bien retenir la forme, la double sinuosité présentée par les courbes d'ombre propre et d'ombre autoportée, ainsi que ses trois points de tangence à 45° , en 5, u et 9.

Il serait pénible, pour obtenir le point de rencontre précédent, d'être obligé de faire la section tangente à l'équateur ; on pourra s'en passer en se fondant sur la propriété de la courbe d'ombre portée que nous venons de démontrer, d'être tangente à 45° , au point d'origine 9.

En effet : Revenons au tracé de la courbe par points, en nous servant des parallèles. Acceptons tous les points, tels qu'ils nous seront donnés, et traçons la courbe, bien continue, qui les réunirait. Une fois faite, nous lui mènerons les deux tangentes à 45° , et nous aurons les points d'origine avec une exactitude bien suffisante.

Nous avons déjà obtenu ainsi les points de passage u et u ; il ne restera plus qu'à tracer la petite courbe tangente deux fois à 45° (à son départ et à son arrivée), qui réunira le point de passage au point d'origine.

11. TRACÉ SIMPLIFIÉ DES COURBES D'OMBRES ET DE TEINTES SUR LES TORES CREUX A CERCLES GÉNÉRATEURS TRÈS-PETITS.

1^o Courbes de teintes.

On procédera comme pour les tores pleins. On substituera aux véritables courbes de teintes des arcs de cercles, au nombre de 4 (y compris les courbes n° 0), décrits d'un point O_1 situé à la distance $\frac{2}{5}$ de R du centre du tore et sur la ligne à 45° (13^e leçon, fig. 3).

2^o Courbes d'ombres propres.

On les fera à la main sans s'inquiéter pour l'ombre du petit équateur des points de passage et d'origine ; mais en se rappelant que, sur le plan de symétrie à 45° , ces deux courbes coupent le

diamètre du cercle générateur au tiers, l'une en K_1 et l'autre en L_1 .

12. LAVIS.

Le lavis du grand tore se fera comme à l'ordinaire, avec teintes d'ébauches, d'ombre propre, de couleur et d'ombres portées. Celui du petit tore simplifié, se fera en passant les teintes deux fois dans les mêmes zones.

13. TORE EXTÉRIEUR CREUX, EN ÉLÉVATION (FIG. 2 ET 3). TRACÉ DES COURBES DE TEINTES.

La figure 2 représente un tore creux en élévation, dans lequel on a enlevé toute la portion intérieure.

Les courbes de teintes se traceront en se servant des échelles renversées, comme on a fait pour le tore en relief, en élévation. On reconnaîtra facilement que les figures ainsi formées reproduisent, renversées, celles du tore en relief. Les élèves les exécuteront donc par un décalque comme ils ont fait pour le plan.

La figure 3 représente le même tore en creux, seulement, on a conservé au centre une gorge, ou *scotie*, creuse, formée par le tore intérieur accompagnée en dessus et en dessous de deux listels cylindriques.

Dans la scotie, les lignes de teintes s'obtiendront en décalquant, après les avoir renversées, les courbes du tore intérieur en relief (planche 9, fig. 3).

Derrière la scotie, dans le fond, nous reproduirons par un décalque, mais en partie seulement, les courbes du tore extérieur en creux (fig. 2).

Le tout va se compliquer des ombres portées.

Sur la figure 2, nous aurons l'ombre portée dans le trou annulaire par la ligne droite et les deux demi-cercles qui forment la ligne de coupe.

Sur la figure 3, nous aurons de plus, et, combinée avec la précédente, l'ombre portée sur la scotie, sur le trou annulaire, et sur le plan de coupe, par le listel supérieur.

14. OMBRE PORTÉE DANS LE TROU ANNULAIRE (fig. 7.)

Pour la tracer, employons le plan auxiliaire à 45° .

Cherchons l'ombre auxiliaire portée sur ce plan par la ligne de coupe $f'k'd'a'b'c'$.

Remarque. — Si l'on cherchait directement l'ombre du point h' situé à 45° sur le demi-cercle de gauche, il porterait ombre en h'_2 , et l'ellipse serait, en ce point, tangente à la ligne à 45° . Il en serait de même au point g'_2 pour l'ombre du point g' du cercle de droite. Cela posé, cherchons différents points de l'ombre portée dans le trou.

15. POINT DE L'OMBRE SITUÉ SUR L'ÉQUATEUR $e' b'$.

Prenons le cercle d'ombre auxiliaire de l'équateur. b' porte ombre auxiliaire en b'_2 .

De b' situé sur l'axe, décrivons l'arc de cercle passant par b'_2 , et nous aurons cette ombre auxiliaire. Cet arc de cercle coupe en t'_2 l'ombre auxiliaire de la ligne de coupe. Ramenons t'_2 en t'_1 , sur l'équateur, par un rayon à 45° et nous aurons le point cherché.

16. POINT DE L'OMBRE SITUÉ SUR UNE PARALLÈLE QUELCONQUE.

Soit, par exemple, le parallèle à 45° , $u' u''$.

Le point u' , porte ombre auxiliaire en u'_2 . Traçons de u'' comme centre, l'arc de cercle $u'' u'_2$, et nous aurons l'ombre auxiliaire du parallèle $u' u''$.

Cet arc de cercle recoupe en t'_2 , l'ombre auxiliaire de la ligne de coupe ; t'_2 ramené en t'_1 par un rayon à 45° donne le point demandé.

On aura, de même, en y'_1 le point situé sur le parallèle inférieur $f' c'$. En ce point, l'ombre portée est tangente à l'horizontale $f' c'$, qui est un contour apparent.

17. POINT D'ORIGINE.

Cherchons le point de l'ombre qui serait situé sur le parallèle à 45° supérieur $g' g''$.

g' porte ombre auxiliaire en g'_2 .

Le parallèle porte ombre suivant le cercle $g'' g'_2$, tangent à 45° , en g'_2 et par suite, tangent aussi à l'ellipse d'ombre auxiliaire.

Si, comme tout à l'heure, on cherchait le second point de recoupement du cercle $g'' g'_2$, on retrouverait le point g'_2 , puisque c'est un point de tangence.

Donc, le point g' porte ombre sur lui-même, et c'est lui le point d'origine.

En ce point, la courbe d'ombre portée est tangente à 45° et au demi-cercle de coupe.

18. OMBRE PORTÉE A GAUCHE.

A gauche, l'ombre partira du point d'origine h' , obtenu comme le point g' , en menant au demi-cercle la tangente à 45° .

L'ombre sera portée par une portion du demi-cercle de gauche, située au-dessus du point d'origine h' .

Point de l'ombre situé sur un parallèle $m'n'$.

m' porte ombre auxiliaire en m'_2 .

Traçons l'arc de cercle $n'm'_2$. Il recoupe l'ellipse auxiliaire en p'_1 , qui relevé en p'_2 par un rayon à 45° donne le point demandé.

Point situé sur le parallèle inférieur $f'o'$.

f' porte ombre en f'_2 . Traçons l'arc de cercle $o''f'_2$. Il recoupe l'ellipse en K'_2 qui relevé en K'_1 donne le point cherché.

En K'_1 , la tangente est horizontale, en h' (point d'origine) elle est à 45° .

Remarque. — Sur la figure 2, nous avons reporté sans faire l'épure, les deux lignes d'ombres portées que nous venons de tracer, figure 7.

19. OMBRE PORTÉE SUR LA SCOTIE (fig. 3 et fig. 8).

Cherchons d'abord l'ombre portée par le cercle de base $a'c'$ du listel sur la scotie (fig. 8.)

Employons le plan auxiliaire à 45° .

L'ombre auxiliaire du cercle $a'c'$ est le cercle (pointillé) $h'b'$, obtenu comme à l'ordinaire par deux lignes à 45° .

Cherchons les points de l'ombre situés : 1° sur un parallèle quelconque $p'p''$; 2° sur l'équateur $m'n'$; 3° sur le parallèle inférieur $t't''$; 4° le point le plus haut ; 5° le point sur l'axe et sur le contour apparent de gauche.

20. POINT SITUÉ SUR UN PARALLÈLE DONNÉ.

Soit $p'p''$ ce parallèle.

Son ombre auxiliaire est le cercle passant par p'' et tracé comme l'on sait.

Ce cercle coupe en q'_2 , l'ombre auxiliaire du listel. Le point q'_2 ramené en q'_1 , sur le parallèle donné, par un rayon à 45° , donne le point cherché.

21. POINT SUR L'ÉQUATEUR.

On procédera de même. L'ombre auxiliaire de l'équateur est le cercle $m'n''$, qui recoupe en o'_2 , l'ombre du listel. On relève o'_2 en O'_1 par un rayon à 45° .

22. POINT SUR LE PARALLÈLE INFÉRIEUR.

Ce parallèle a pour ombre auxiliaire le cercle t'' , qui recoupe en s'_2 l'ombre du listel. On ramène s'_2 en s'_1 , par un rayon à 45° .

En s'_1 la courbe a pour tangente l'horizontale $t'' s'_1$ qui est le contour apparent.

23. POINT LE PLUS HAUT.

A cause de la symétrie ce, point est sur le méridien de symétrie à 45° . Ce sera donc le point h' du listel qui le donnera. Ramenons, par rotation, h' en a' . Au point a' menons le rayon φ jusqu'en h'' où il coupe le demi-méridien.

Ramenons h'' en h'_1 sur une horizontale, par une rotation inverse de 45° . On aura, sans faire la rotation, le point h'_1 en menant par h' le rayon à 45° jusqu'à la rencontre de l'horizontale menée par h'' . Au point h'_1 la tangente est horizontale.

24. POINTS SUR L'AXE ET SUR LE CONTOUR APPARENT DE GAUCHE.

Nous avons assez de points de la courbe pour la tracer d'un trait continu. On obtiendra ainsi, sans le chercher directement le point u'_1 situé sur l'axe, ou mieux, sur le méridien de profil. Pour des raisons de symétrie, expliquées déjà plusieurs fois, si nous menons l'horizontale $u'_1 u''_1$ nous aurons en u''_1 le point situé sur le contour apparent de gauche.

25. OMBRES PORTÉES SUR LE TROU ANNULAIRE ET SUR LE PLAN DE COUPE.

Nous reproduirons en $x'g'_1$ et en $y't'$ l'ombre, ou du moins une partie de l'ombre trouvée (fig. 7) dans le trou annulaire.

Cherchons l'ombre du listel sur le plan de coupe, comme si

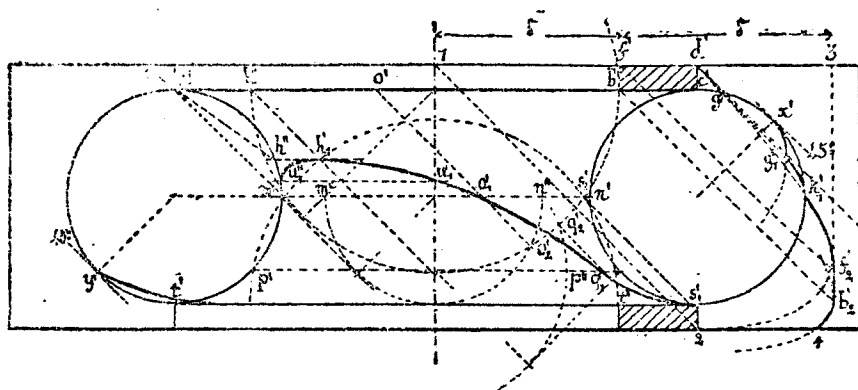
le trou n'existait pas. Nous savons trouver cette ombre (ombre d'un cercle horizontal sur le plan vertical de projection).

Le cercle supérieur du listel $f'd'$ porte ombre suivant une ellipse, $d'k'f'_2$, tangente en d' , à la ligne à 45° et tangente à la verticale au point f'_2 ombre du point f' .

Ce point f'_2 est facile à obtenir de la manière suivante : d'une part f'_2 est sur la ligne à 45° du point f' ; d'une autre part, si l'on mène la verticale f'_23 , on aura $1f' = 3f'$.

Le cercle inférieur du listel porte ombre de b'_2 en 4. Le point b'_2 étant obtenu comme vient de l'être le point f'_2 .

Fig. 8.



Cela fait, nous remarquons que l'ellipse $d'f'_2$ coupe en g' l cercle d'ouverture du trou et le recoupe en k'_1 .

L'ombre primitive du trou a été tracée ou du moins amorcée de x'_1 en g'_1 , pareille à celle trouvée figure 7.

Menons le rayon à 45° $g'g'_1$. L'ombre primitive du trou doit donc cesser en g'_1 , et l'on doit lui faire succéder, avec une brisure en g'_1 , l'ombre portée dans le trou par le cercle supérieur d listel.

Le point k'_1 sera un autre point de cette ombre ; nous trac rons donc un petit arc de courbe de g'_1 en k'_1 .

Remarque. — En k'_1 cet arc de courbe est tangent au dem cercle de coupe, qui forme contour apparent.

Au point g'_1 la tangente est presque une ligne à 45° parce que est l'ombre portée par un point du listel, qui serait très-vois du point d' ,

Sur la gauche, l'ombre portée dans le trou est la même qu sur la figure 7. Elle est seulement cachée par la scotie, sur u très-petite étendue.

26. LAVIS.

Le lavis se fera comme à l'ordinaire.

Après la teinte d'ébauche, on passera les teintes d'ombres propres et de couleurs, comme si les ombres portées n'existaient pas ; après quoi, avec les teintes d'ombres portées on achèvera le lavis.

Dans les parties où les zones dans l'ombre portée seront trop larges, on pourra opérer par flaches, comme nous l'avons indiqué. (La première flache est faite aux $\frac{2}{3}$ et la seconde à $\frac{1}{3}$)

27. TRAVAIL DES ÉLÈVES.

Les élèves feront le tracé des ombres et le lavis des figures 4, 5 et 6 de la planche 9, ainsi que le lavis simplifié des petits tores creux de la même planche, d'après le tracé donné au n° 10 de la 13^e leçon.

15^e LEÇON.

CAVETS ANNULAIRES, DROITS ET INCLINÉS.

1. CAVET ANNULAIRE.

Nous étudierons dans cette leçon une portion de tore que l'on rencontre très-souvent, comme raccordement de deux cylindres de diamètres différents ; c'est un congé, dont le profil est un cavet, et que nous désignerons du nom de *cavet annulaire*.

Nous l'étudierons (planche 10) : 1^o En élévation (fig. 1) tourné en haut ; 2^o en élévation (fig. 2) tourné en bas, et surmonté d'un demi-tore en relief qui portera ombre sur lui ; 3^o en plan (fig. 3) et portant ombre sur le plan sur lequel il repose. Enfin, nous l'inclinerons à 45° dans les deux sens, tourné vers la lumière (fig. 4 et 5) ou vers l'ombre (fig. 6 et 7) ; nous en établirons les projections dans ces deux positions, et nous chercherons les lignes de teintes et d'ombres propres.

2. CAVET ANNULAIRE TOURNÉ EN HAUT (EN ÉLÉVATION) (Fig. 1).

Nous chercherons directement, à l'aide des échelles, les points, des lignes de teintes situés sur le parallèle $a'b'$, suivant lequel le cavet se raccorde au cylindre supérieur. L'échelle 1', est celle qui convient. Elle nous donne du même coup les lignes de teintes de ce cylindre.

Nous pourrions chercher les points situés sur les parallèles à 22° 1/2, 45° et 67° 1/2. Mais, pour simplifier le travail, nous avons donné à ce cavet les dimensions du tore creux étudié dans la dernière leçon ; les élèves décalqueront donc sur leur dernier dessin, les lignes de teintes trouvées pour la moitié de ce tore creux, et les reporteront sur l'épure actuelle.

Les lignes de teinte du petit cylindre $c'd'$, s'obtiendront avec l'échelle n° 1'.

On remarquera que sur le cavet, le cercle $c'd'$ est ce que nous avons nommé une *ligne de démarcation* intermédiaire entre la ligne de teinte n° 3 et la ligne n° 2.

3. CAVET ANNULAIRE TOURNÉ EN BAS (EN ÉLEVATION). TRACÉ DES LIGNES DE TEINTES (Fig. 2).

Sur le demi-tore supérieur, on tracera les teintes comme à l'ordinaire, en cherchant les points situés sur l'équateur ef' (échelle 1) et sur différents parallèles. Mais, ici encore, on pourra décalquer ces lignes sur la planche 9. Sur le petit cylindre intermédiaire $g'h' - m'n'$ on appliquera l'échelle n° 1'.

Sur le cavet $m'n'o'p'$, on déterminera directement les points situés sur les parallèles connus, ou bien on décalquera sur la planche 9 les lignes de teintes. Enfin, sur le cylindre inférieur $o'p'$, on appliquera l'échelle n° 1'.

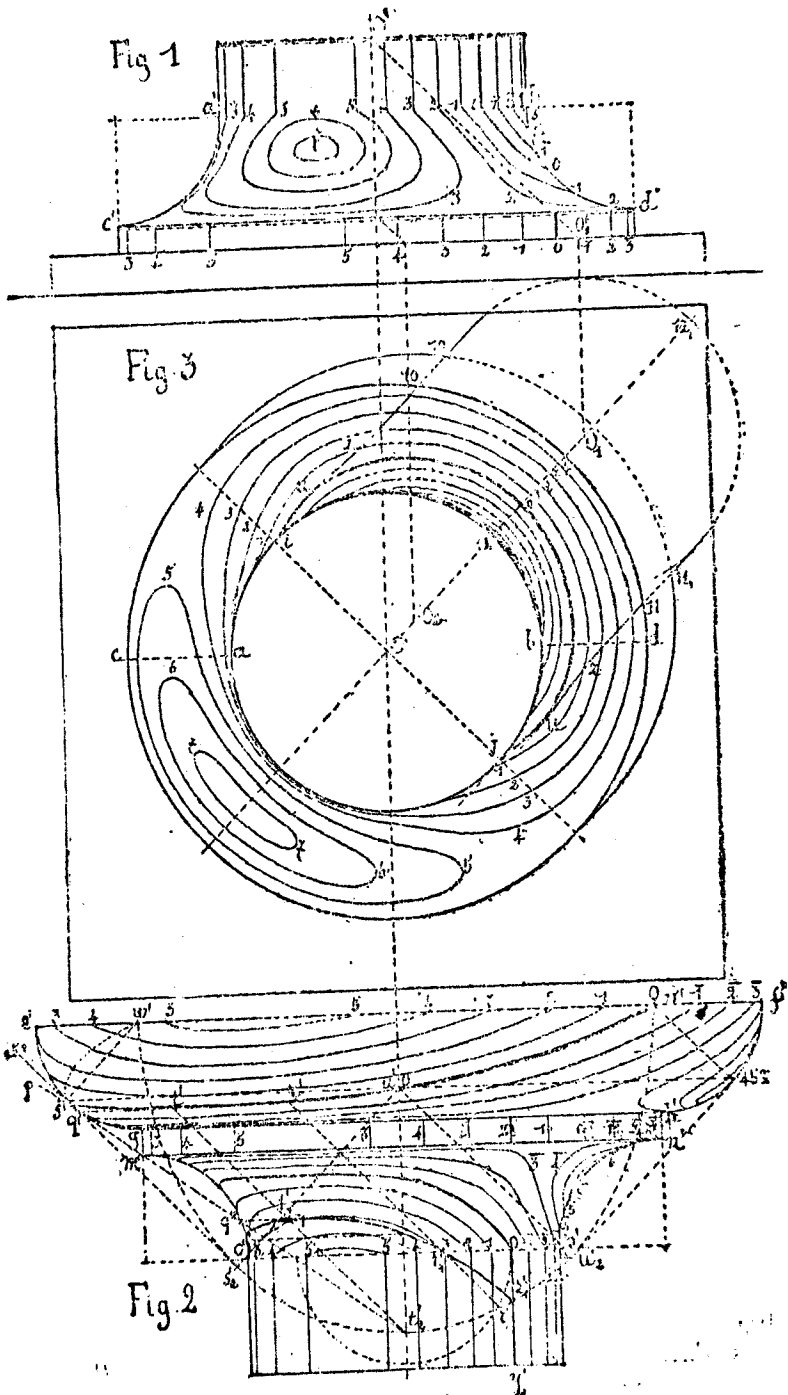
Les lignes de ce cylindre rencontrent les lignes correspondantes du cavet en des points situés sur la ligne de raccordement $o'p'$. Mais, on remarquera que, tandis que les deux surfaces (cylindre et cavet) se raccordent le long de la ligne $o'p'$, il n'en est pas de même de leurs lignes de teintes. Ces dernières se *coupent* sur la ligne $o'p'$, mais ne s'y raccordent pas en étant tangentes entre elles. Il y a des brisures aux points 0, 1, 2.... $\bar{1}$, $\bar{2}$,.... de la ligne $o'p'$. Sur les dessins, on adoucit, en général, ces brisures en raccordant par un petit arc de courbe les lignes droites du cylindre et les lignes courbes du cavet. On remarquera aussi que, sur le cavet, le parallèle $m'n'$ forme *ligne de démarcation* entre les teintes $\bar{3}$ et $\bar{4}$.

4. OMBRE PORTÉE PAR LE TORE SUR LE CAVET (Fig. 2).

Nous savons que cette ombre sera la même que celle portée par la ligne d'ombre propre $w's't'u'v'$ du tore.

Employons le plan auxiliaire à 45° que nous connaissons et cherchons d'abord l'ombre auxiliaire de la ligne $w's't'u'v'$.

Les deux points w' et u' de l'équateur sont dans le plan à 45° et sont à eux-mêmes leurs ombres auxiliaires. En v' et w' les tangentes sont verticales. Le point s' du contour apparent de gauche porte ombre auxiliaire au point s'_2 obtenu à l'aide des



deux lignes à 45° $s's_2$ et $u's_2$. Le point u' projeté sur l'axe porte ombre auxiliaire en u_2 obtenu de la même manière.

Aux points s'_2 et t'_2 les tangentes sont à 45° . Enfin, le point le plus bas t' étant dans le plan de symétrie à 45° porte ombre en t'_2 sur l'axe.

Le point t'_2 peut être obtenu directement en menant la tangente à l'angle φ , au contour apparent du tore. $\varphi t'_2$ est cette tangente.

Au point t'_2 la tangente est horizontale. Joignons les points $v'u'_2, t'_2, s'_2, w'$ par une ligne continue tangente aux droites indiquées ci-dessus et nous aurons la courbe d'ombre auxiliaire demandée.

Elle ressemble à une ellipse, mais ce n'en est pas une.

On remarquera la facilité avec laquelle les points principaux se sont obtenus, et l'on devra, à l'avenir, savoir les trouver facilement. Cela posé, cherchons le point de l'ombre portée situé sur un parallèle donné, par exemple, sur le parallèle de raccordement $o'p'$.

L'ombre auxiliaire de ce parallèle est le cercle passant par le point n° 0 d'ombre propre du cylindre. Ce cercle coupe l'ombre auxiliaire du tore au point r'_2 qui, relevé en r'_4 par un rayon à 45° donne le point de l'ombre demandée.

Cherchons le point de perte z'_1 , c'est-à-dire le point de l'ombre situé sur la génératrice d'ombre propre du cylindre.

Or, cette génératrice est précisément dans le plan auxiliaire à 45° , elle est donc à elle-même son ombre auxiliaire. Elle recoupe en z'_1 l'ombre auxiliaire du tore. z'_1 est le point de perte. La tangente en ce point est la ligne à 45° , d'après le théorème sur les points de perte.

Déterminons aussi le point le plus haut t'_1 .

Pour des raisons données plusieurs fois déjà, ce point est dans le plan de symétrie à 45° . Ce sera donc le point le plus bas, t' , de l'ombre propre qui le donnera.

Amenons par la rotation de 45° connue, le plan de symétrie à devenir le méridien principal. Le point t' vient en q' (q' étant le point de tangence du rayon φ). Menons le rayon φ . Il coupe en q'' le profil du cavet, sans toucher le listel $m'n'$.

Ramenons q'' en t'_1 en nous servant du point t'_2 situé sur l'axe et du rayon à 45° $t'_2 t'_1$ et nous aurons en t'_1 le point le plus haut. La tangente y est horizontale. On aura de cette façon assez de points pour tracer la courbe. On prendra le point où elle coupe l'axe ; on mènera par ce point une horizontale jusqu'au contour apparent de gauche, et l'on aura le point situé sur ce contour.

5. LE CAVET EN PROJECTION HORIZONTALE. TRACÉ DES LIGNES DE TEINTES. (Fig. 3.)

Les lignes de teintes sont les mêmes que celles du tore creux en plan étudié dans la dernière leçon, mais en n'en prenant que la moitié. On les décalquera et on les reportera sur l'épure actuelle.

On remarquera que le grand cercle de base cd est une *ligne de démarcation*, comprise entre les teintes 4 et 5, et correspondant à l'éclairage que nous avons désigné sous le nom d'éclairage à saturation.

Les points situés sur le petit cercle a, b s'obtiendraient à l'aide de l'échelle 15' (échelle des contours apparents circulaires).

Enfin, si nous n'avions le tracé de ces lignes déjà fait, nous aurions facilement les points situés sur les méridiens de profil et de front, à l'aide de l'échelle n° 1, dont on ne prendrait que la moitié, et ceux qui appartiendraient aux méridiens à 45°, à l'aide des échelles 2' et 4'.

6. OMRRES PORTÉES SUR LE PLAN HORIZONTAL ET SUR LE CAVET (Fig. 3).

Prenons le centre oo' , de la base supérieure du cylindre auquel se raccorde le cavet. Il porte ombre sur le plan horizontal en $o_1o'_1$ obtenu comme à l'ordinaire.

De o_1 comme centre, traçons le cercle $0_1, 12_1$, égal à ce cercle de base, et nous aurons l'ombre portée par cette base.

Menons les deux tangentes à 45° $z10_1$ et $z11_1$. Nous aurons les ombres portées par les génératrices d'ombres propres du cylindre.

Remarque. — Ces génératrices étant perpendiculaires au plan horizontal portent ombre, suivant des lignes qui, en projection horizontale, sont droites et à 45°, quelles que soient les surfaces sur lesquelles cela ait lieu.

Prenons les points de passage u et u , de l'ombre propre n° 0 du cavet. Nous savons qu'on obtient ces points par des tangentes à 45°. Puis, menons les petits arcs de courbes uz, uz , tangents aussi à 45°, aux points z, z et nous aurons en uz les petits arcs de la courbe d'ombre autoportée.

Enfin, le grand cercle de base $cd, c'd'$ porte ombre aussi sur le sol.

Son centre porte ombre en o_2 , obtenu comme l'on sait, et lui-même porte ombre en vraie grandeur suivant le demi-cercle $10_1 11_1$.

Il y a brisures aux points $10_1 - 11_1$.

7. CAVET ANNULAIRE TOURNÉ A GAUCHE ET A 45° (Fig. 4 et 5). PROJECTIONS DU CAVET.

En projection verticale nous aurons la même figure que si le cavet n'était pas penché ; seulement la position ne sera pas la même.

Le petit cercle de base inférieur sera projeté verticalement tout entier suivant la ligne à 45° $a'b'$. Sa base inférieure donnera la ligne $c'd'$ et l'autre base du listel, la droite $e'f'$.

En projection horizontale, tous ces cercles donneront des ellipses dont nous avons les axes.

Le petit cercle $a'b'$ donne l'ellipse $abgh$, et l'on a $gh = a'b'$.

Le grand cercle $c'd'$ donne l'ellipse $cdij$, et l'on a $ij = c'd'$.

Enfin le cercle $e'f'$ donne la demi-ellipse fhk obtenue en portant vers la droite, et d'une quantité constante, tous les points de la précédente. Figurons, en trait mixte, le cercle que décrirait le centre de la sphère génératrice du tore.

Sa projection verticale est la droite lm' , et sa projection horizontale l'ellipse $lmpq$ égale à l'ellipse $cdij$.

8. TRACÉ DES LIGNES DE TEINTES.

Nous emploierons, comme toujours, la méthode des surfaces circonscrites, généralisée.

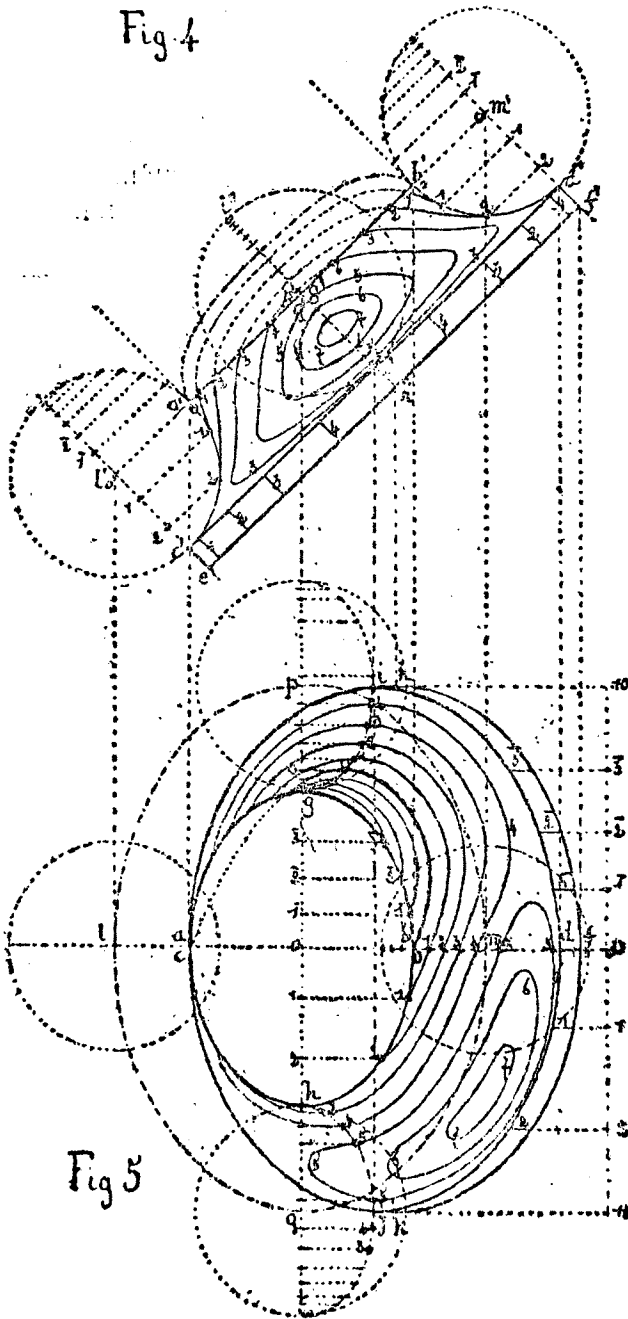
Considérons d'abord le petit cercle $ab, a'b'$. Un cylindre qui l'aurait pour base serait circonscrit au cavet et serait dans la position d'un cylindre à 45° dans l'ombre (échelles 4' et 5'), avec cette différence, si on le compare au croquis qui accompagne les échelles 4' et 5', que nous avons en élévation ce qui, sur le croquis, est en plan et inversement.

En $a'b'$ appliquons l'échelle n° 4' et nous aurons les points 0 1 2 3 4, 4 3 2 1 0. Les points n° 0 sont justement aux extrémités a' et b' . Sur le plan, appliquons l'échelle n° 5' sur le grand axe hg de l'ellipse.

Par les points obtenus menons, à droite, les horizontales jusqu'à l'ellipse, et nous aurons les points 0 1 2, $\bar{1}$ $\bar{2}$ 3.

Le point n° 0 tombe à l'extrémité b du petit axe.

Prenons la sphère génératrice du tore dans des positions telles que non-seulement nous puissions facilement trouver sa courbe



de contact avec le tore, mais encore que nous sachions placer à

l'aide de nos échelles les points des lignes de teintes situés sur ces courbes.

Supposons d'abord son centre situé en pp' et en qq' .

Alors la courbe de contact est un cercle projeté verticalement suivant la droite $p'i'$ et horizontalement suivant l'ellipse pig ou l'ellipse hjq .

Le cylindre qui aurait cette ellipse pour base serait creux, et dans la position désignée, cylindre à 45° en lumière (échelles 2' et 3' renversées).

Sur la droite $g'i'$ en élévation, nous appliquerons la moitié de l'échelle n° 2'.

En plan, sur les diamètres gp et qh de nos ellipses de contact, nous appliquerons les deux moitiés de l'échelle n° 3'.

Les points obtenus, nous les ramènerons sur la demi-ellipse, par des horizontales, et nous aurons de nouveaux points de nos courbes.

Plaçons enfin le centre de la sphère aux points ll' et mm' .

Les lignes de contact sont d'une part le quart de cercle $a'c'$, projeté horizontalement suivant la droite al , et de l'autre le quart de cercle $b'd'$, projeté horizontalement en bd .

En élévation, nous appliquerons en $l'c'$ et $m'd'$ l'échelle n° 15' des contours apparents.

En plan, nous emploierons l'échelle n° 1' des cylindres perpendiculaires aux plans de projection, seulement, nous aurons bien soin de mettre son milieu en m et en l .

L'échelle mise en l donnera des points cachés, que nous n'avons même pas figurés.

Nous avons de cette façon un assez grand nombre de points, moins que dans le tore à axe vertical, mais assez cependant pour tracer nos courbes.

On remarquera : 1° que nous n'avons aucun point en projection horizontale des courbes 6 et 7. On les tracera de sentiment;

2° Que le grand cercle de base $c'd'$ forme *ligne de démarcation*, puisque le cavet vient s'y raccorder à un plan.

En projection horizontale, l'ellipse $cdij$ est ligne de démarcation comprise entre les lignes 4 et 5. En élévation, la ligne $c'd'$ est comprise entre les teintes 2 et 3.

Comme toujours, la ligne n° 0 est la courbe d'ombre propre.

9. LIGNES DE TEINTES DU LISTEL.

Le listel $c'd'e'f'$ est un cylindre aplati, placé dans la position

à 45° dans l'ombre. Nous lui appliquerons, en élévation, l'échelle n° 4' et en plan, suivant 10, 11, l'échelle n° 5'.

10. OMBRES PORTÉES.

Le cercle $a'b'$ — $abgh$ porterait une ombre dans l'intérieur du cavet. Mais elle différera très-peu de la ligne d'ombre propre n° 0, nous supposerons donc qu'elle se confond avec elle.

11. CAVET ANNULAIRE TOURNÉ A DROITE ET A 45° . TRACÉ DES LIGNES DE TEINTES (Fig. 6 et 7).

Ce cavet se représente de la même manière que l'autre, seulement, les ellipses sont tournées dans l'autre sens. Les élèves pourront donc les calquer sur l'épure précédente, pour les reporter sur celle-ci. Nous n'insistons pas sur la représentation du cavet dans cette position. Procédons, pour le tracé des teintes, comme nous venons de faire.

Un cylindre qui aurait pour base le petit cercle $a'b'$ — $abgh$, serait à 45° en lumière. Nous lui appliquerons : en élévation, l'échelle n° 2' et en plan l'échelle n° 3'.

On remarquera qu'au point n° 0, ainsi donné sur l'ellipse $abgh$ ainsi que sur l'autre point n° 0 qui serait avec le premier sur un même diamètre, les tangentes à cette ellipse sont à 45° .

Ce fait s'explique facilement. En effet, le cercle $a'b'$ — $abgh$ n'est autre chose que la section faite dans le tore par un plan coupant qui serait perpendiculaire au plan vertical et incliné à 45° , c'est-à-dire par un plan parallèle aux rayons lumineux. Or, si l'on se reporte à la méthode des plans coupants, on a vu que si l'on mène à la section ainsi faite une tangente parallèle aux rayons lumineux, le point de tangence sera un point de l'ombre propre qui, nous le savons, porte le n° 0.

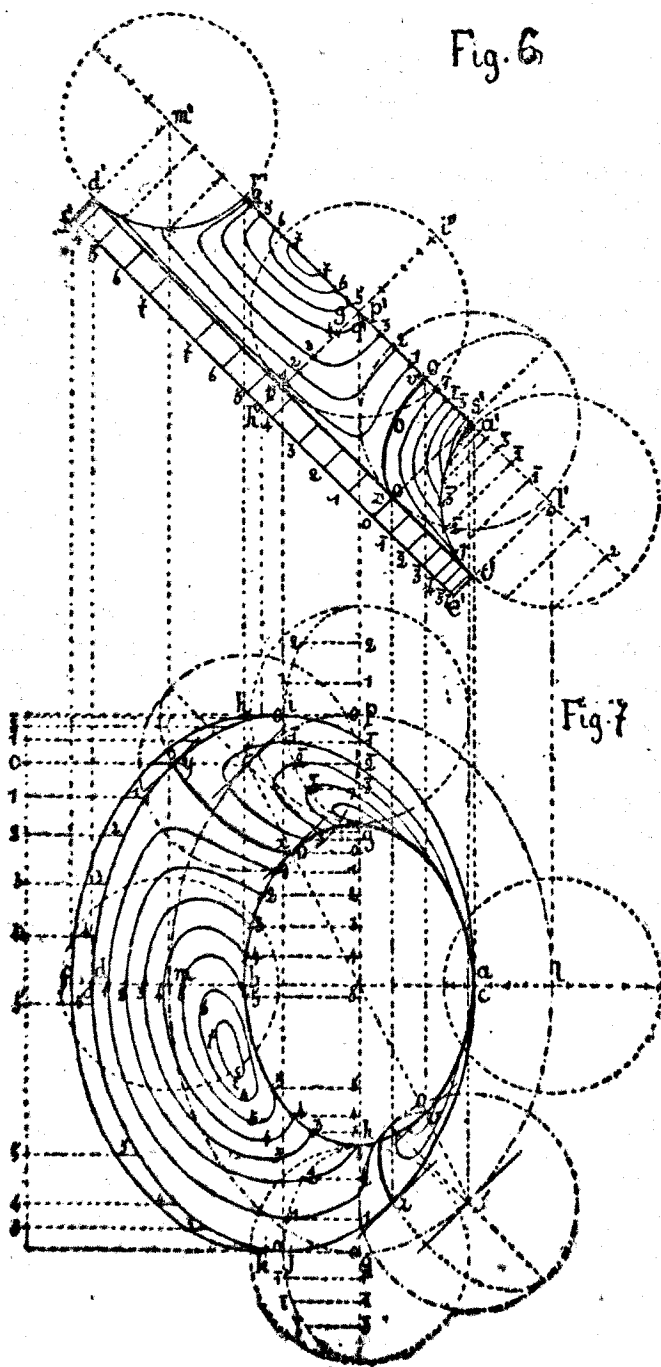
Donc en ce point 0, la tangente à la section, c'est-à-dire à l'ellipse $abgh$, est un rayon lumineux à 45° . Prenons la sphère génératrice ayant son centre en mm' et en ll' . De même que tout à l'heure, en projection verticale, nous placerons sur $m'b'$ et sur $l'a'$, l'échelle n° 15' des contours apparents et en plan, nous appliquerons sur bd et sur al l'échelle n° 1'.

Supposons que le centre de la sphère soit en p et en q . Alors, les courbes de contact sont des cercles projetés verticalement en $i'p'$ (échelle n° 3') et horizontalement suivant le quart d'ellipse hqj et gpi (échelle n° 4', cylindres à 45° dans l'ombre).

Nous n'insistons pas sur la manière d'avoir tous ces points.

12. LIGNES D'OMBRES PROPRES.

En opérant ainsi, on remarquera que nos échelles nous donnent toutes un point n° 0 situé sur le grand cercle de base $c'd' - cdi$.



En effet, le plan de ce cercle est à 45° et dans l'ombre. Les rayons lumineux lui seraient tangents, et, comme lui-même est tangent au tore tout le long de ce cercle, il en résulte que la ligne $c'd' - cdij$ est une première ligne d'ombre propre du cavet. Il en existe une seconde que nous allons chercher.

Prenons l'ellipse $m.l.p.q$, projection horizontale du cercle $m'l'$ décrit par le centre de la sphère génératrice, et menons-lui aux points s et t les tangentes à 45° . (Ces tangentes sont des rayons lumineux.)

Imaginons que la sphère ait son centre en s ou en t . Suivant quelle ligne se raccordera-t-elle alors avec le cavet ?

Comme dans toutes les autres positions, la ligne de contact avec le cavet sera un grand cercle dont le plan sera perpendiculaire à la tangente en s ou en t , au cercle $m'l'$ décrit par son centre. Mais dans le cas actuel, cette tangente est précisément le rayon lumineux ; le cercle de contact aura donc son plan perpendiculaire au rayon lumineux et par conséquent ce sera précisément le cercle d'ombre propre de la sphère dans la position s ou t .

Faisons donc la construction suivante :

En s et en t , construisons la sphère génératrice. Traçons, comme nous savons le faire, les ellipses xy (pour la sphère t), et zv (pour la sphère s), projections de sa ligne d'ombre.

En projection verticale, relevons s en s' sur le cercle $m'l'$ (le point s' serait donné directement par le n° 0 de l'échelle $2'$, appliquée le long de $m'l'$, ou, ce qui revient au même, de $d'c'$), traçons la sphère ayant son centre en s' et construisons son ellipse d'ombre propre $v'z'$. (Comme vérifications v et v' , z et z' seront deux à deux sur les mêmes lignes de rappel.)

Les ellipses ainsi figurées sont les lignes de contact du cavet et de la sphère dans les positions s et t , mais comme ce sont aussi les lignes d'ombre propre de cette sphère, il s'ensuit qu'elles constituent à elles deux la seconde ombre propre du cavet.

13. CONSTRUCTION SIMPLIFIÉE DE LA SECONDE OMBRE PROPRE.

En projection verticale, on remarquera que les points v' et z de l'ellipse sont les points n° 0 des cercles $b'a'$ et $d'c'$. Les échelles les donneront donc immédiatement. En projection horizontale aux points x et y , les tangentes aux ellipses ad et ab sont à 45° . Il en est de même aux points v et z . Comme ces ellipses sont forcément tracées pour limiter le contour du cavet,

il sera donc facile de leur mener les tangentes à 45°, ce qui permettra, surtout si une épure soignée a fait connaître la position des quarts d'ellipses qui constituent la deuxième ombre, de tracer cette dernière avec assez d'exactitude.

Ayant ainsi les deux lignes d'ombre propre, on tracera les courbes de teintes, passant par les points trouvés précédemment. On voit que les deux courbes d'ombre propre sont des lignes de démarcation.

14. LAVIS.

Le lavis se fera comme à l'ordinaire ; nous ne donnerons pas de détails à son sujet.

15. NATURE DES MATÉRIAUX. DIMENSIONS.

On supposera que tous les corps figurés dans cette planche sont en bronze et mi-polis. Les dimensions sont les mmès que pour les tores faisant l'objet de la planche 9.

Sphère génératrice.	Diamètre = 40 ^{mm} .
Petit cercle intérieur.	Diamètre = 60 ^{mm} .

16. TRAVAIL DES ÉLÈVES.

Pour la prochaine leçon, les élèves feront au trait la planche 10. Ils traceront en outre les lignes d'ombre et de teintes et passeront la teinte d'ébauche.

Tous les titres seront mis.

Le lavis sera fait dans la semaine suivante, celle qui séparera les 16^e et 17^e leçons.

De cette façon, les élèves auront deux semaines pour exécuter la planche 10.

16^e LEÇON.

TORES COMPOSÉS.

1. DÉFINITIONS.

On nomme tores composés ceux dont les profils sont ceux des moulures composées.

Les figures 1, 2, 3, de la planche 11, représentent une *doucine annulaire en saillie*, vue en élévation et droite (fig. 1) en plan (fig. 2), et en élévation, renversée (fig. 3).

Les figures 4, 5 et 6 représentent une *doucine annulaire en creux*, droite et renversée, en élévation et en plan.

Les figures 7, 8 et 9 représentent un *talon annulaire en saillie*, droit ou renversé, en élévation et en plan.

Ces tores composés sont des combinaisons de tores simples raccordés entre eux, et les lignes de teintes s'obtiennent en traçant séparément, sur chaque tore simple, les lignes qui lui conviennent et les raccordant ensuite entre elles.

Quoique la planche 10, étudiée dans la dernière leçon, ne soit pas terminée par les élèves, cependant nous expliquerons dans celle-ci, et d'avance, les figures de la planche 11, afin de terminer cette première partie du cours par une leçon de théorie sur le lavis. Nous tracerons d'abord des ombres portées; après quoi, nous n'aurons plus que quelques mots à dire pour indiquer le tracé des lignes de teintes.

2. DOUCINE ANNULAIRE EN SAILLIE, EN ÉLÉVATION ET RENVER-SÉE. — TRACÉ DE L'OMBRE PORTÉE PAR SON LISTEL (Fig. 2 bis).

Soit $a'b'$ le cercle de base du listel. Employons le plan auxiliaire à 45° .

Le cercle $g'g'$, passant par le point g' de l'ombre propre, est l'ombre portée auxiliaire du cercle $a'b'$.

Cherchons le point de l'ombre situé sur un parallèle donné, $c'd'$ par exemple.

Le cercle $K'g'_2c'_2$ en est l'ombre auxiliaire. Il recoupe le premier, au point g'_2 qui, relevé en g'_1 sur le parallèle $c'd'$, donne le point demandé.

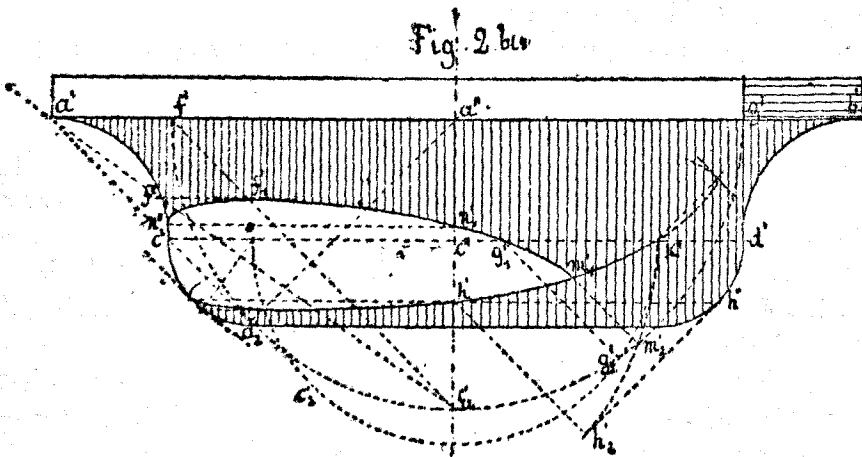
Point le plus haut.

Comme toujours, par a' menons le rayon ϕ ; il coupe en f'' le profil de la doucine et en f'_2 l'axe. Je ramène f'' en f'_1 situé sur l'horizontale $f''f'_1$ d'une part et d'autre part, sur la ligne à 45° , menée par f'_2 , ou par le point f' .

Au point f'_1 la tangente est horizontale.

Point de perte m'_1 .

Nous avons obtenu comme à l'ordinaire l'ombre propre du tore inférieur. h' en est le point situé sur l'axe et k' celui situé sur l'équateur.



Cherchons, comme nous l'avons vu dernièrement, l'ombre auxiliaire de la ligne $h'k'$.

k' étant dans le plan à 45° est à lui-même son ombre auxiliaire.

h' porte ombre auxiliaire en h'_2 obtenu comme nous savons par les deux lignes à 45° $h'h'_2$ et $h''h'_2$.

Nous n'avons pas besoin de l'ombre auxiliaire de la ligne $h'k'$ tout entière. Nous ne tracerons que la portion h'_2k' avec assez l'exactitude, puisque en k' la tangente est verticale et en h'_2 elle est à 45° .

Cette branche de courbe coupe en m'_2 le cercle $f'g'$.

Le point m'_2 , relevé en m'_1 sur l'ombre propre, donne le point de perte cherché.

En m'_1 d'après le théorème connu, la tangente est le rayon lumineux à 45° .

Point sur l'axe et sur le contour apparent.

On tracera la courbe passant par $f'_1 g'_1 m'_1$, et l'on aura en n'_1 le point sur l'axe. En menant l'horizontale $n'_1 n''_1$ on aura en n''_1 le point sur le contour apparent.

On retracera sur la figure 2 la courbe d'ombre portée que nous venons d'obtenir ainsi sur la figure 2 bis.

3. DOUCINE ANNULAIRE EN SAILLIE. — OMBRE PORTÉE EN PLAN (Fig. 3).

Nous en donnons l'épure sur la moitié du plan qui n'est pas occupée par les lignes de teintes.

A la partie supérieure nous avons un demi-tore complet, dont l'ombre propre extérieure ghk a été tracée soit directement (3^e Leçon), soit à l'aide des échelles.

C'est ce tore, ou, ce qui revient au même, la ligne ghk qui portera ombre sur le sol et sur le cavet annulaire qui forme la partie inférieure de la doucine.

Prenons comme plan auxiliaire le plan horizontal de base, $m'n'$ (fig. 1) de la doucine et cherchons, sur ce plan, l'ombre de la ligne d'ombre propre ghk .

Le point gg' , porte ombre auxiliaire en $g_1 g'_1$, le point hh' en $h_1 h'_1$; menons l'arc de courbe $h_1 g_1$, tangente en g_1 à 45° , et nous aurons une portion de l'ombre auxiliaire cherchée.

Elle recoupe en r_1 le cercle de base mn de la doucine, lequel est dans le plan horizontal auxiliaire; le point r_1 est donc le point de l'ombre portée, situé sur le cercle mn .

D'un autre côté, nous avons en gux l'ombre propre, réelle de g en u et virtuelle, de u en x , du cavet annulaire inférieur.

Au point de passage u , raccordons-nous, comme nous l'avons vu avec la ligne uz d'ombre autoportée.

Le point z est le point d'origine de l'ombre cherchée; c'est l'ombre portée du point g .

z et g sont sur la même ligne à 45° .

Enfin, joignons z et r_1 par un arc de courbe, tangent en z , à

la ligne à 45° , tangent en r , à l'ombre portée auxiliaire g_1h_1 , et nous aurons l'ombre demandée.

4. TRACÉ DES LIGNES DE TEINTES DE LA DOUCINE ANNULAIRE EN SAILLIE.

1° Sur l'élévation (fig. 1) doucine droite.

Des points o' et o'' , centres des cercles qui forment le profil, nous menons les rayons à 45° , ce qui nous donne les parallèles à 45° de nos tores.

Sur ces deux parallèles nous appliquerons l'échelle n° 9' droite. (Cônes à 45° , en élévation, pointe en haut.)

Sur le parallèle de séparation des deux demi-moulures, nous appliquerons l'échelle n° 1'. (Cylindres verticaux.)

Enfin, sur le méridien de profil $a'b'c'$, nous appliquerons de a' en b' , l'échelle 1' renversée, dont on n'aura pris que la moitié en lumière, et de b' en c' nous ferons de même, mais sur une dimension un peu plus grande.

2° Sur l'élévation (fig. 2), doucine renversée.

Nous prendrons les mêmes parallèles à 45° , mais nous y appliquerons l'échelle n° 11'. (Cônes à 45° , en élévation, pointe en bas.)

Sur le parallèle de raccordement, l'échelle 1' et sur le méridien de profil, deux fois la moitié de l'échelle 1'.

3° Sur le plan (fig. 3).

Nous mènerons le méridien de front mn , et celui de profil, et nous y appliquerons, comme l'indique la figure 3, l'échelle 1' ou la moitié de cette échelle, suivant les cas.

Sur le méridien de symétrie à 45° , nous placerons l'échelle n° 2', droite ou renversée, en entier ou par moitié.

Sur le méridien à 45° ordinaire, nous nous servirons de l'échelle 4'.

Nous aurons ainsi assez de points pour tracer les courbes.

Nous remarquerons que les courbes de mêmes numéros, du tore et du cavet viennent se couper, en formant des pointes très-aiguës sur le cercle pointillé sur lequel se fait le raccordement des deux profils ; et nous remarquerons de nouveau ce fait, qui semble singulier, que, tandis que les deux surfaces se raccordent,

les lignes de teintes et d'ombres propres se coupent sous des angles vifs.

Dans les lavis, on émousse un peu ces angles.

Enfin, nous aurons soin de placer les sommets 10, 10, — 11, 11, — 12, 12, des courbes fermées sur les mêmes droites issues du centre du tore.

5. DOUCINE ANNULAIRE EN CREUX.

Doucine droite. — Ombre de la coupe (fig. 4 bis).

Nous nous servirons du plan auxiliaire à 45° . Ce sera le profil $c'a'd'g'$ de la coupe, qui portera ombre dans l'espèce de cuvette ainsi formée, et sans doute aussi la portion $c'f'$ de la ligne d'ombre propre intérieure.

Cherchons l'ombre auxiliaire à 45° du profil $c'a'd'g'$. Les doubles lignes à 45° , $c'q'_2$ et $c''q'_2$, nous donnent le point q'_2 ombre auxiliaire de c' . De même l'ombre de a' en a'_2 (qui n'est pas marqué sur l'épure) Celle de d' en d'_2 et de g' en g'_2 .

Nous obtenons ainsi une courbe sinueuse en forme d' s , formée de deux portions d'ellipses, tangentes en q'_2 et d'_2 au rayon lumineux à 45° , et en g'_2 à l'autre ligne à 45° , $g''g'_2$.

Cela posé, cherchons le point de l'ombre portée situé sur un parallèle quelconque $m'm''$, par exemple.

Le point m' porte ombre auxiliaire en m'_2 , et le parallèle $m'm''$, porte ombre auxiliaire suivant le cercle tracé de m'' comme centre, avec $m''m'_2$ pour rayon.

Ce cercle coupe la courbe sinueuse en un premier point p'_2 qui, relevé à 45° en p'_1 , donne un point de l'ombre. Il la recoupe en un autre point q'_2 , qui donne en q'_1 un autre point de l'ombre.

Mais il se trouve, par hasard, que sur notre épure, q'_1 tombe presque à l'extrémité de la courbe sinueuse de sorte que q'_1 est, à très-peu près, l'ombre portée par le point c' , point de tangence à 45° du profil de coupe.

En ce point q'_1 , la tangente à l'ombre portée est une ligne à 45° .

Nous joindrons q'_1 au point de passage, que nous supposons être f' , et nous aurons de q'_1 en f' une ombre autoportée.

A la partie inférieure, l'ombre portée a son point d'origine en d' , point de tangence à 45° du profil (nous en avons déjà donné la raison plusieurs fois), et elle est elle-même, en ce point, tangente à 45° .

Point le plus bas s'_1 .

Cherchons par tâtonnements un parallèle $n'n''$ tel, que son cercle d'ombre auxiliaire n'_2n'' ne coupe pas, comme tout à l'heure, la courbe sinueuse en deux points, mais lui soit tangent, c'est-à-dire la coupe en deux points réunis en un seul.

Alors les deux points de l'ombre ainsi fournis et situés sur le parallèle $n'n''$ seront réunis en un seul, et la courbe d'ombre en ce point s'_1 sera tangente au parallèle $n'n''$. Nous aurons le point le plus bas.

A l'aide de tous ces points, et aidés par la connaissance des tangentes, nous tracerons facilement la courbe.

Ombre de l'ouverture cylindrique inférieure.

La doucine annulaire que nous étudions est percée à la partie inférieure par une ouverture cylindrique, qui porte ombre sur elle-même.

On reconnaît l'ombre dite l'ombre du pont. Le point d'origine est au point à 45° que les échelles donneront (en ce point, la tangente est inclinée à 2 de hauteur pour 1 de base) et l'ombre est formée par un arc d'ellipse qui, prolongé, irait rencontrer l'axe en z' , en étant tangent en ce point au rayon à 45° issu du point g' .

6. DOUCINE CREUSE. — OMBRE DU PLAN. (Fig. 6 bis.)

Ce sera la ligne jf , ombre propre intérieure du tore supérieur qui portera ombre sur le cavet annulaire.

Prenons le plan horizontal $g'l'$ (fig. 4 bis) comme plan auxiliaire d'ombres portées. Le point le plus haut, j , y porte ombre en j_3 obtenu en rabattant sur le côté, en $o''g''$ le profil du tore, et menant au point j'' la tangente ϕ , jusqu'en j_3 , où elle coupe le plan de base oi prolongé.

Le point cc' porte ombre auxiliaire en $c_3c'_3$ et le point ff' en $f_3f'_3$; nous aurons donc en $f_3c_3j_3$ l'ombre auxiliaire demandée.

Cela fait, cherchons le point de l'ombre portée dans la doucine, et situé sur un parallèle quelconque $d'd''$ par exemple, projeté horizontalement suivant le cercle dd . Le centre d'' de ce parallèle porte ombre auxiliaire en d'_3d_3 , et l'ombre du parallèle sera le cercle décrit de d_3 comme centre avec un rayon égal à celui du parallèle dans l'espace.

Ce cercle coupe en k_3 l'ombre auxiliaire f_3j_3 . Relevons k_3 en k_4 sur le parallèle dd et nous aurons le point cherché.

Fig. 4 bis.

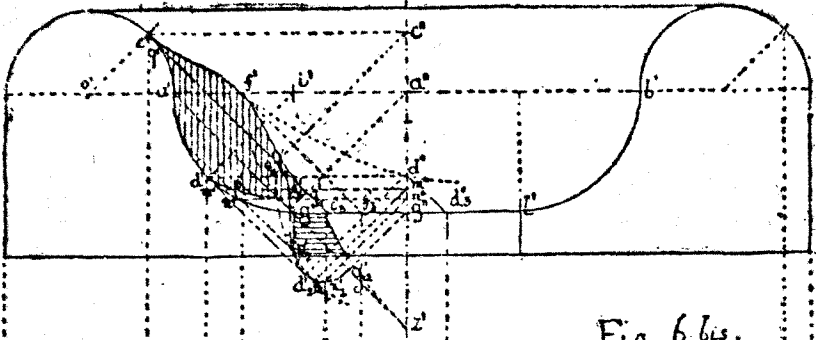
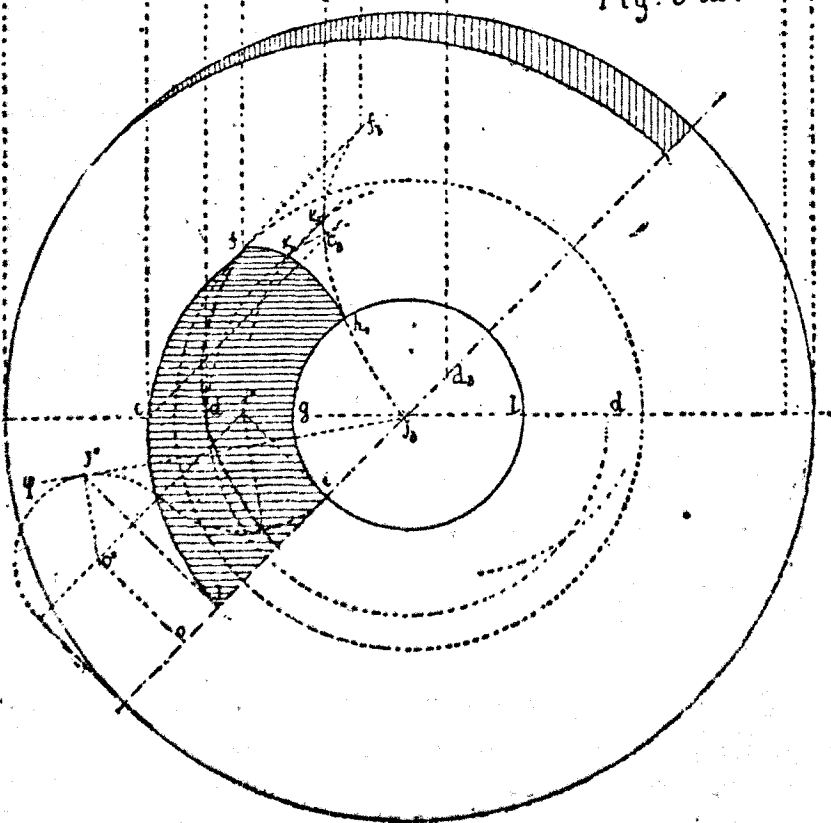


Fig. 6 bis.



Si on voulait le point situé sur le parallèle inférieur $g'l$, il suffirait de prendre le point h_4 où il coupe la ligne f_3j_3 , puisque c'est le plan même de ce parallèle qui sert de plan auxiliaire.

L'ombre cherchée passe par les points f (point d'origine), k_1 et h_1 .

En f elle est tangente à 45° .

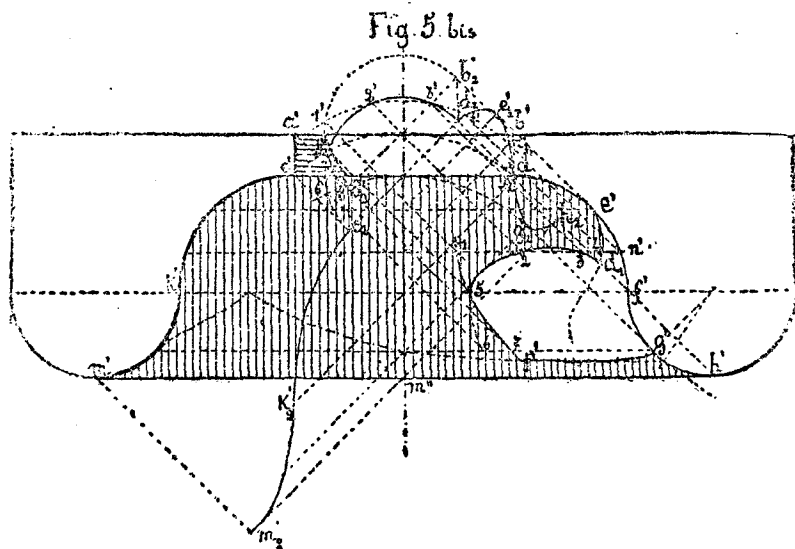
En h_1 elle est tangente à la courbe d'ombre auxiliaire f_3j_3 .

7. MÊME DOUCINE, RENVERSÉE. — OMBRE DE LA COUPE.
(Fig. 5 bis.)

L'ombre sera portée, en partie par la ligne de coupe $mk'e'$, en partie par les deux cercles $c'd' - a'b'$ qui forment les bases de l'ouverture cylindrique supérieure.

Servons-nous du plan auxiliaire à 45° et cherchons l'ombre auxiliaire portée par le profil de coupe $m'k'e'$, $d'f'h'$ et par les deux cercles de l'ouverture annulaire.

m' porte ombre en m'_2 , obtenu à l'aide des deux lignes à 45° , $m'm'_2$ et $m''m'_2$, de même k' en k'_2 , c' en c'_2 et ainsi de suite.



Nous obtenons ainsi les deux lignes sinuées $m'_2k'_2c'_2$ et $d'_2f'_2h'_2$. La première est allongée, l'autre est aplatie.

Les deux cercles $c'd'$ et $a'b'$, portent ombres auxiliaires suivant les deux cercles $a'_2b'_2$ et $c'_2d'_2$, se recoupant au point s' .

Telles sont les ombres auxiliaires de toutes les lignes qui peuvent porter ombre dans l'intérieur de la doucine renversée.

Nous chercherons les points situés sur quelques parallèles.

Commençons, par exemple, par le parallèle e' , qui correspond au point de tangence à 45° du profil.

e' porte ombre en e'_2 . Le cercle d'ombre auxiliaire du parallèle e' passerait par e'_2 et serait tangent à la courbe sinueuse ; donc le point e' porte ombre sur lui-même et, c'est le point d'origine de l'ombre portée.

Prenons un second parallèle n' .

Le point n' porte ombre auxiliaire en n'_2 .

L'ombre du parallèle est le cercle $n'_2 4' 3' 2'$, qui recoupe la courbe sinueuse au point $4'$ et les cercles a'_2 et c'_2 aux points $3' 2' 1'$.

Ramenons tous ces points sur le parallèle n' , par des lignes à 45° et nous aurons, en 4, 3, 2 et 1 des points de l'ombre portée. Seulement le point 1 sera virtuel.

Prenons le parallèle de raccordement f' .

Son ombre auxiliaire est le cercle f'_2 qui recoupe les cercles d'ombre de l'ouverture supérieure en $5'$. Par l'effet du hasard, nous venons passer sur le point de brisure $5'$ des deux ombres auxiliaires des cercles de base de l'ouverture.

Ramenons $5'$ en 5 sur le parallèle f' , et nous aurons, non-seulement un point de l'ombre, mais le point de brisure.

Enfin le parallèle g' donne une ombre auxiliaire, qui est le cercle $g'_2 7' 6'$. Il coupe les cercles a'_2 c'_2 , aux points $7'$ et $6'$ qui donnent sur le parallèle les points de l'ombre 7 et 6. Le point 6 sera virtuel.

Nous avons maintenant assez de points pour tracer la courbe. Nous avons deux points de brisure, l'un en d'_1 , l'autre en 5, et un point de perte en p' .

Le point de brisure s vient d'être trouvé :

L'autre point de brisure d_1 s'obtiendra par continuité.

On a les points 5, 2, 3, qui permettent de connaître le mouvement de l'une des courbes, les points e' et 4, qui donnent celui de l'autre, en prolongeant ces courbes, au sentiment, on aura d'_1 avec assez d'exactitude, surtout si l'on remarque, qu'en ce point la courbe s , 2, 3 doit être tangente à la ligne à 45° , issue du point d' .

Le point de brisure 5 a été obtenu par hasard. On profitera des points virtuels 1 et 6, pour préciser le mouvement des deux courbes qui viennent se couper au point 5.

Enfin, le point de perte p' s'obtiendra avec assez d'exactitude, en prolongeant la courbe 1, 5, 7.

Au point p' , la tangente est à 45° .

Dans l'ouverture cylindrique supérieure, on tracera l'ombre du pont.

8. TRACÉ DES LIGNES DE TEINTES SUR LA DOUCINE ANNULAIRE CREUSE (Fig. 4, 5 et 6).

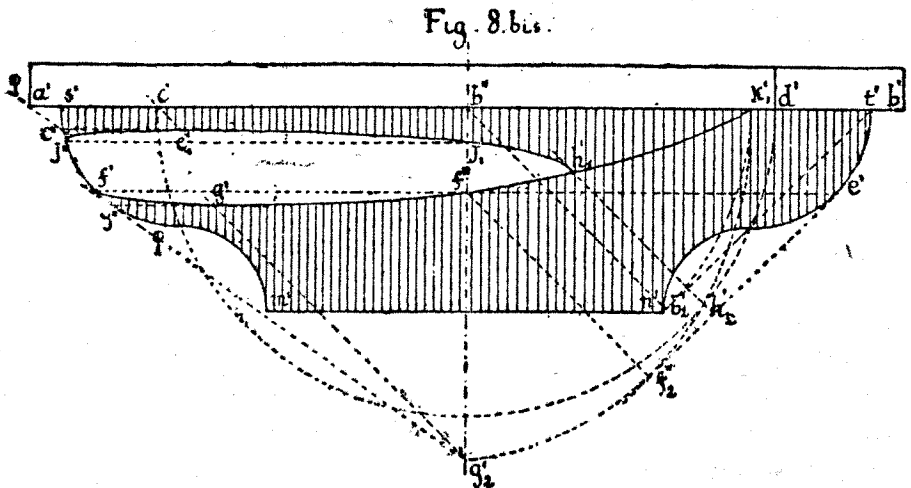
Nous ne dirons rien de ce tracé qui se fera exactement comme celui des fig. 1, 2 et 3. Il suffira d'un peu d'attention pour voir les échelles qui s'appliquent aux parallèles ou aux méridiens sur lesquels on cherchera des points. D'ailleurs sur les figures 4, 5 et 6 nous avons inscrit les nos des échelles qui conviennent.

9. TALON ANNULAIRE EN SAILLIE (Fig. 7, 8, 9).

Ombre portée sur le talon renversé en élévation,

Sur le talon droit fig. 7 et en élévation, il n'y a que les ombres propres. Sur le talon renversé, il y a l'ombre portée par le listel de couronnement. Nous allons l'étudier (fig. 8 bis).

Soit $a'b'$ le cercle de base du listel. Nous prenons le plan auxiliaire à 45° et nous avons en $c'd'$ le cercle auxiliaire d'ombre de ce listel.



Nous nous contenterons de trouver le point de perte h'_1 et le point le plus haut c'_1 .

Le point le plus haut est donné par le rayon ϕ , mené en a' . Ce rayon coupe le profil en c'' que nous ramenons en c'_1 , sur l'horizontale $c''c'_1$, d'une part et sur la ligne à 45° $c'c'_1$ de l'autre.

Pour avoir le point de perte, nous cherchons l'ombre auxiliaire de la ligne d'ombre propre $f''f''k'_1$.

Le point k'_1 est à lui-même son ombre auxiliaire, f'' porte

ombre en f''_2 et nous pouvons tracer l'arc de courbe passant par k_1 (avec tangente verticale) et par f''_2 (avec tangente à 45°).

Cet arc de courbe coupe le cercle $c'd'$ au point h'_2 qui, relevé en h_1 sur l'ombre propre du tore, donne le point de perte (avec tangente à 45°).

La courbe s'achève comme nous l'avons déjà montré plusieurs fois.

10. TALON ANNULAIRE EN SAILLIE

Ombre portée en plan (Fig. 9).

Ce sera le cercle de base supérieure ij , $i'j'$ qui portera ombre sur le tore.

Cherchons le point de l'ombre situé sur un parallèle donné pq , $p'q'$ (parallèle de raccordement des deux parties du tore).

Prenons le plan de ce parallèle comme plan auxiliaire. Cherchons en $s_1s'_1$ l'ombre du centre s du cercle ij . Traçons de s_1 comme centre, un cercle s_1b_1 égal au cercle ij , et nous aurons l'ombre auxiliaire de ce dernier. Elle recoupe en b_1 , le parallèle pq ; le point b_1 est le point cherché.

En b_1 la courbe d'ombre sera tangente au cercle s_1b_1 et le traversera, c'est-à-dire passera, en b_1 , d'un côté à l'autre, de ce cercle.

Point de perte n_1 .

Prenons, comme plan auxiliaire, le plan de base $x'y'$ du listel, et cherchons :

1° En s_2n_2 l'ombre auxiliaire portée sur ce plan par le cercle ij ;

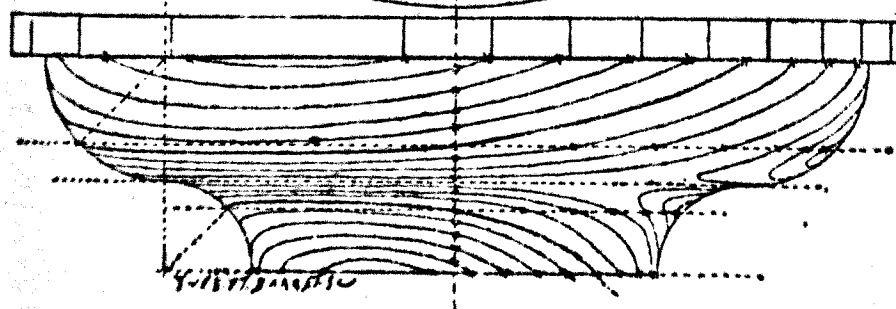
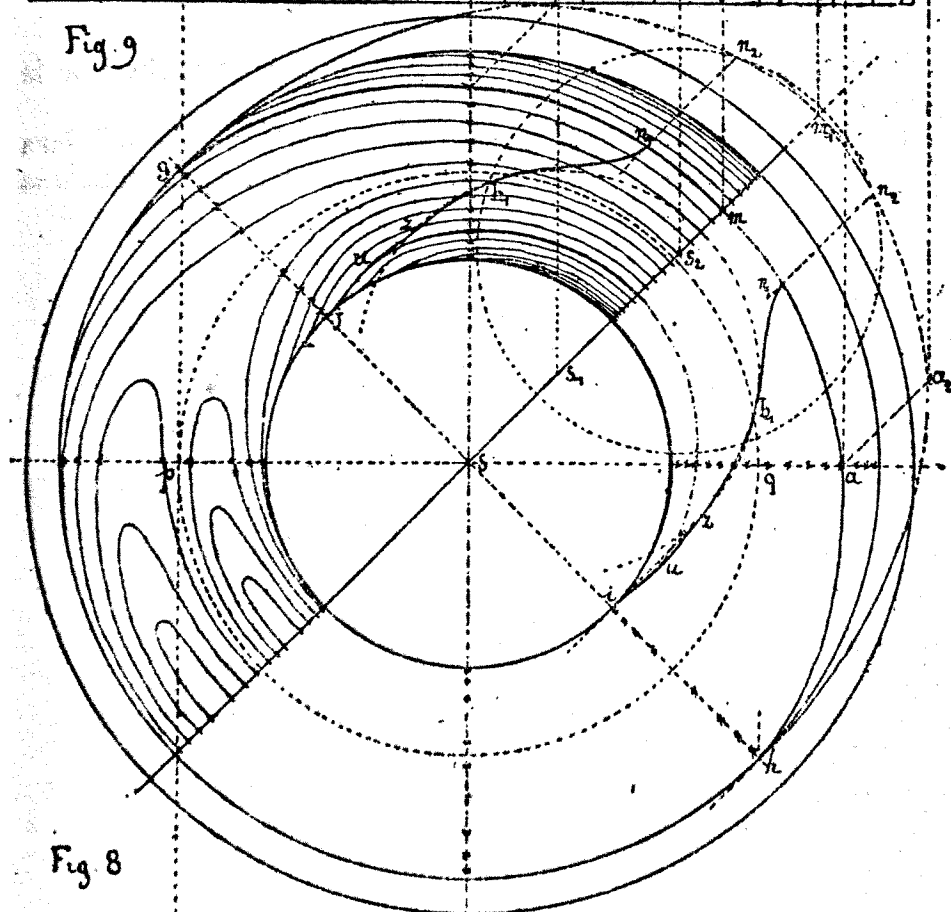
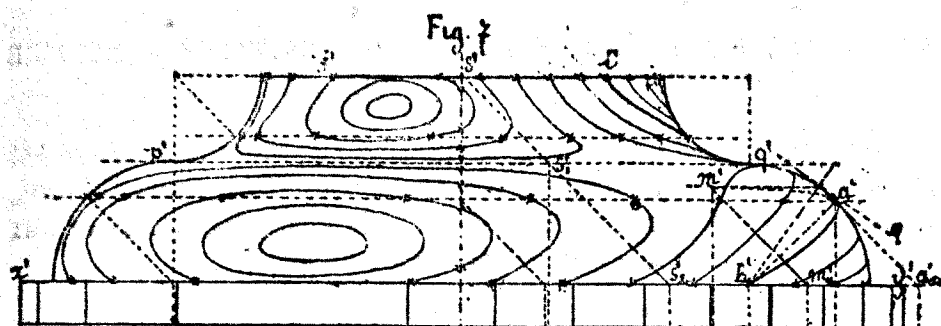
2° En m_1a_1h l'ombre auxiliaire portée par la ligne d'ombre propre, h,a,m — $h'a'm'$, du tore inférieur.

On voit facilement sur l'épure comment cette ombre auxiliaire m_1a_1h a été trouvée.

Ces deux ombres auxiliaires se coupent en n_2 qui, relevé en n_1 sur l'ombre propre, donne le point de perte. La tangente y est à 45° .

La courbe d'ombre portée se tracera donc facilement en i, u, z, b_1, n_1 .

On reconnaît en u le point de passage, (la tangente y est à 45°), et en z le point d'origine, ombre portée par le point i , (la tangente y est encore à 45°).



11. TRACÉ DES LIGNES DE TEINTES SUR LE TALON ANNULAIRE
(Fig. 7, 8 et 9).

Nous ne l'expliquerons pas, puisque la marche à suivre est la même que pour les autres tores. Sur le croquis ci-joint nous n'avons pas inscrit les n^{os} des échelles, afin de laisser aux élèves le soin de faire eux-mêmes cette recherche.

12. TRAVAIL DES ÉLÈVES.

Pour la prochaine leçon, les élèves termineront le lavis de la planche 10.

La planche 11, dont nous venons de donner l'explication, sera faite par eux dans les deux semaines qui correspondront à la 17^e et à la 18^e leçon.

17^e ET 18^e LEÇONS

THÉORIE DU LAVIS (SUITE ET FIN).

1. Dans les deux leçons qui vont suivre, nous achèverons la théorie du lavis, dont nous n'avons fait que commencer l'étude dans les leçons 5 et 6 et nous justifierons le tracé des lignes de teintes sur les sphères mi-polies et dépolies.

Nous avons dit qu'il existait trois principes : Le principe des *couleurs*, que nous avons déjà étudié ; celui des *distances* et celui des *orientations*. Nous nous occuperons de ces deux derniers.

2. PRINCIPE DES DISTANCES.

Lorsqu'un objet s'éloigne de nous, deux effets se produisent :

1^o La lumière qu'il nous envoie, et, par suite, l'éclat total qu'il possède pour nous, décroît en raison directe du carré de la distance ; cet effet, cependant, est absolument nul pour notre œil, et s'il existait seul, les objets paraîtraient aussi éclatants de loin que de près. En effet : plus un objet est loin, moins il nous envoie de lumière, c'est vrai, mais plus il paraît petit dans notre œil, de telle sorte que celui-ci, recevant moins de lumière, mais la condensant sur un espace plus petit, l'éclat par unité de surface de cet espace reste constamment le même, et l'objet doit paraître aussi éclatant de loin que de près. Dans les pays où l'atmosphère est très-pure, en Égypte notamment, les distances ne modifient que la grandeur apparente des objets, mais presque pas l'intensité de leur coloration ;

2^o Lorsqu'un objet s'éloigne, il s'interpose entre lui et nous une sorte de brouillard formé par l'air ; ce brouillard est d'autant plus intense que l'air est moins pur. Il agit :

1^o Par *réflexion*, en recevant de la lumière et nous la renvoyant, ce qui diminue d'autant l'éclat des objets situés derrière ;

2^o Par *transparence*, en colorant de sa couleur, qui est bleue, les objets devant lesquels il s'interpose.

3. DES DIFFÉRENTS PLANS EN PEINTURE.

En peinture, on classe les objets suivant leur distance à l'œil par les places qu'ils occupent.

Les objets placés très-près sont dits en *premier plan* ; on admet que, sur eux, l'effet de l'air est nul ; donc les objets en premier plan posséderont leur couleur absolue.

Placés un peu plus loin, les objets sont dits en *deuxième plan* ; en deuxième plan, les objets jaunes paraîtront moins jaunes et un peu bleus ou mieux, un peu neutralisés comme couleur ;

Les objets rouges paraîtront moins rouges et un peu bleus, c'est-à-dire un peu violets ;

Les objets bleus paraîtront moins bleus s'ils sont bleu foncé, et au contraire, un peu plus bleus s'ils sont bleu très-clair.

Encore plus loin, les objets sont en *troisième plan* ; tous les effets indiqués ci-dessus devront être accentués.

Enfin, tout à fait loin, les objets sont dits dans le *lointain* ; la couleur bleue augmente, et l'on peut dire que toutes les couleurs viennent se fondre dans le bleu ;

Le jaune devient bleu-jaune, c'est-à-dire un peu verdâtre ;

Le rouge devient rouge-bleu, c'est-à-dire un peu violacé ;

Le bleu devient moins foncé s'il était d'abord foncé, et plus foncé, au contraire, s'il était très-clair ; en tous cas, jamais ce bleu de lointain ne peut devenir intense ; il ne doit évidemment pas dépasser le bleu de ciel, qui est le bleu de l'air à son maximum d'intensité.

4. MANIÈRE DE RENDRE EN CAMAÏEU, A L'ENCRE DE CHINE, LES EFFETS DE LA DISTANCE.

Les effets de distance se rendront à l'encre de Chine de manières différentes suivant l'intensité des tons. En effet, un objet est-il foncé ? En s'éloignant, il doit : 1^o perdre de sa coloration, c'est-à-dire s'éclaircir ; 2^o prendre le ton de l'air, c'est-à-dire se fonder.

Suivant que l'un ou l'autre de ces deux effets l'emportera, on devra diminuer ou augmenter la teinte du premier plan.

Exemples :

1^o Un objet jaune en lumière, se rendra en premier plan par une teinte d'encre de Chine pour ainsi dire nulle; en s'éloignant, c'est l'effet d'assombrissement de l'air qui l'emportera; on rendra l'éloignement en ajoutant de légères teintes d'encre de Chine qui, cependant, ne devront jamais, même pour les lointains, dépasser la teinte que l'on jugera devoir représenter le bleu de ciel;

2^o Un objet jaune dans l'ombre, et, plus généralement, tout objet dans l'ombre se rendra, en premier plan, par une teinte d'encre de Chine en général assez intense; en éloignant l'objet, c'est l'effet d'éclaircissement qui l'emportera et on devra diminuer les teintes.

3^o Pour un objet rouge en lumière, le rouge étant un ton demi-sombre, la teinte d'encre de Chine qui le rendra ne sera ni claire ni foncée, et à peu près celle qui conviendrait comme bleu de lointain; il pourra donc se faire que l'éloignement conduise à ne modifier que très-peu la teinte rendant le rouge. Cependant, comme il ne faut jamais, en dessin, rester dans l'indécision, on devra franchement adopter un rouge clair ou un rouge foncé; s'il est clair, on en rendra les effets, comme on l'a fait pour du jaune; s'il est foncé, on agira comme il va être dit pour le bleu;

4^o Un objet bleu dans la lumière, le bleu étant une couleur sombre, se rendra, en premier plan, par une teinte d'encre de Chine un peu accentuée; en s'éloignant, cette teinte devra diminuer, tandis que l'air viendra pour la foncer; le premier effet l'emportera; par conséquent, pour les bleus, surtout les bleus sombres (ceci ne s'appliquerait pas aux bleus clairs), la distance se rendra en diminuant le ton de premier plan.

5. RÉGLE GÉNÉRALE.

Veut-on savoir, en faisant un lavis, si tel ton d'ombre ou de lumière doit être rabattu ou éclairci en s'éloignant, on commencera par établir le ton qui conviendrait aux lointains, et qui sera très-voisin de celui qui figurera le ciel; les tons plus clairs que celui-là s'assombriront en s'éloignant, mais sans jamais dépasser comme ton celui des lointains; les tons plus foncés que celui des lointains devront s'éclaircir en s'éloignant,

mais sans jamais devenir plus clairs que le ton des lointains. En résumé, tous les tons en s'éloignant tendront à se rapprocher d'un ton unique qui est celui des lointains.

6. PRINCIPE DES ORIENTATIONS.

Les rayons lumineux et les rayons visuels.

L'orientation d'un plan ou d'un élément plan de surface (on sait que toute surface courbe peut être considérée comme formée d'éléments plans très-petits) dépend de la position qu'occupe ce plan :

1° Par rapport aux rayons lumineux ;

2° Par rapport aux rayons visuels qui émanent du spectateur.

Dans le dessin géométrique, les rayons lumineux sont menés à 45° comme nous l'avons défini dans les précédentes leçons. Le spectateur est supposé placé à l'infini, soit au-dessus du plan horizontal quand il regarde une projection horizontale, et dans ce cas les rayons visuels sont perpendiculaires au plan horizontal ; soit en avant du plan vertical quand il regarde une projection verticale, et dans ce cas les rayons visuels sont perpendiculaires au plan vertical. Dans tous les cas, les rayons visuels sont perpendiculaires au plan sur lequel se fait la projection que l'on regarde.

7. CORPS DÉPOLIS ET CORPS POLIS.

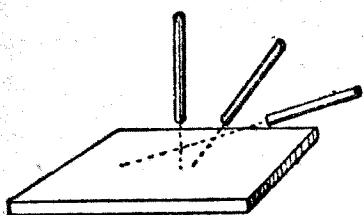
La lumière, en frappant un corps, est renvoyée par la surface de deux manières différentes suivant que ce corps est dépoli ou poli. Pour bien faire comprendre la différence qui existe entre ces deux espèces de corps, nous allons étudier ce qui se passe sur un plan dépoli et sur un plan poli.

Une surface dépolie est celle qui, recevant la lumière, la renvoie dans tous les sens, la *diffuse*, comme on dit ; une surface en plâtre, bien blanc, peut être considérée comme le type d'une surface dépolie. Il est facile, en prenant un plan recouvert de plâtre, de faire les expériences suivantes.

PREMIÈRE EXPÉRIENCE (Fig. 1).

On place ce plan devant la lumière solaire ou devant une forte lumière diffuse ; il s'éclaire uniformément et paraît d'une

Fig. 1.



teinte blanche parfaitement unie. On prend un tube (le tuyau d'un porte-plume) noirci intérieurement au noir de fumée pour éviter les réflexions de la lumière dans l'intérieur, et on regarde la plaque au travers de ce tube. L'extrémité du tube paraît être un rond blanc d'un certain éclat ; on

inclina le tube dans toutes les positions, ce qui revient à faire varier l'angle sous lequel on regarde la plaque, et le rond blanc paraît toujours aussi éclatant : il est impossible d'apprécier les différences, excepté cependant lorsqu'on est très-près de l'incidence rasante, auquel cas il se produit un petit assombrissement dû aux aspérités du plâtre, qui se recouvrent les unes les autres et qui présentent chacune leur partie dans l'ombre.

Les conséquences de cette expérience sont faciles à prévoir ; nous les concluerons ainsi :

1^o Un corps parfaitement dépoli, recevant de la lumière, la renvoie en devenant pour ainsi dire à son tour source de lumière, c'est-à-dire en émettant de la lumière dans tous les sens avec une égale intensité, comme ferait un boulet rouge (on sait qu'un boulet rouge paraît être un disque et non une sphère) ;

2^o L'éclat apparent d'une surface dépolie ne dépend pas de la position du spectateur, mais uniquement de l'intensité de la source lumineuse et de l'angle sous lequel la lumière directe frappe cette surface ;

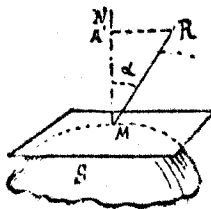
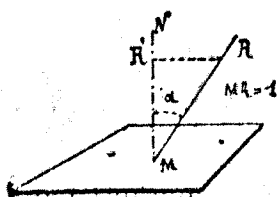
3^o Sur une surface dépolie, les lignes d'égal éclat apparent seront, par conséquent, les lignes d'égal éclaircissement.

Avant d'indiquer la deuxième expérience, nous allons donner quelques définitions.

8. NORMALE A UN PLAN ET A UNE SURFACE (Fig. 2 et 3).

La normale à un plan est la perpendiculaire MN à ce plan.

Fig. 2 et 3.



La normale en un point M d'une surface S est la perpendiculaire MN à un plan tangent à la surface en ce point.

Remarque. — La normale en un point d'une sphère est toujours le rayon qui passe par ce point.

9. ANGLE D'INCIDENCE.

Lorsqu'un rayon lumineux rencontre un plan ou une surface, l'angle d'incidence est l'angle que ce rayon fait avec la normale au plan où à la surface. Dans les figures ci-jointes, l'angle d'incidence est l'angle RMN.

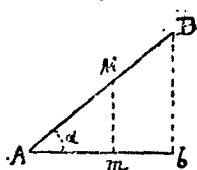
10. COSINUS DE L'ANGLE D'INCIDENCE.

Prenons sur le rayon RM une longueur constante égale à l'unité, projetons cette longueur en R'M sur la normale. Cette projection est le cosinus de l'angle d'incidence. En général, le *cosinus* d'un angle est la projection sur un des côtés de l'angle d'une longueur égale à l'unité prise sur l'autre côté.

11. THÉORÈME (Fig. 4).

Quand une droite AB se projette sur une autre suivant ab , la

Fig. 4.



projection de la première sur la seconde est égale à la première multipliée par le cosinus de l'angle compris.

En effet, prenons $AM = 1$, et projetons AM en Am ; par définition, Am c'est $\cos. \alpha$; or les deux triangles semblables donnent :

$$\frac{Am}{Ab} = \frac{AM}{AB}, \quad \text{mais } Am \text{ c'est } \cos. \alpha,$$

on a donc :

$$\frac{\cos. \alpha}{Ab} = \frac{1}{AB}.$$

Et, par suite, chassant les dénominateurs,

$$Ab = AB \times \cos. \alpha. \quad \text{c.q.f.d.}$$

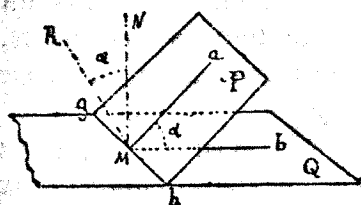
12. ANGLE DE DEUX PLANS.

L'angle formé par deux plans est égal à l'angle formé par leurs normales (fig. 5).

L'angle dièdre de deux plans P et Q se mesure par son angle

plan, en prenant un point sur l'arête et menant dans chaque

Fig. 5.



plan deux droites Ma , Mb , perpendiculaires à cette arête ; or, menons les deux normales MN , MR ; elles sont toutes deux perpendiculaires à l'arête gh et par suite comprises dans le même plan que les deux droites Ma , Mb , qui sont dans le même cas.

Mais MN étant perpendiculaire au plan Q , est perpendiculaire à la droite Mb passant par son pied dans le plan. De même, MR est perpendiculaire à Ma ; par suite l'angle RMN des deux normales est égal à l'angle plan aMb , comme ayant les côtés perpendiculaires C.Q.F.D.

13. ÉCLAIREMENT TOTAL, ÉCLAIREMENT UNITAIRE OU SPÉCIFIQUE D'UNE SURFACE PLANE.

Lorsqu'une surface plane, égale à A , reçoit une quantité de lumière égale à Q , son éclairement total est la quantité totale de lumière qu'elle reçoit, c'est donc Q . Mais l'éclairement de l'unité de surface n'est pas Q ; si nous voulons le connaître, nous dirons, comme pour la règle de trois :

Si A reçoit une lumière égal à Q ,

1 recevra A fois moins ou $\frac{Q}{A}$.

$\frac{Q}{A}$ est ce qu'on nomme *l'éclairement unitaire ou spécifique de la surface* ; ce sera l'éclairement de un millimètre carré de surface si nous prenons le millimètre carré pour unité de surface.

L'éclairement unitaire est fort important à considérer pour nous. Une surface nous paraîtra uniformément éclairée si son éclairement unitaire est le même partout, ou si chaque millimètre carré est également éclairé. Si, au contraire, cet éclairement unitaire est variable, il y aura des nuances dans l'éclat de cette surface. Cela étant,

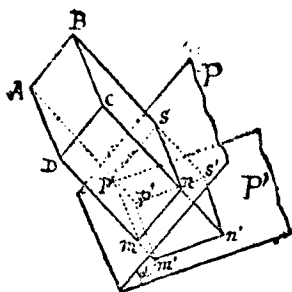
14. THÉORÈME.

L'éclairement unitaire d'une surface plane ou d'une portion de surface courbe assez petite pour qu'on puisse la considérer comme plane est proportionnel au cosinus de l'angle d'inci-

dence. Ce théorème est susceptible d'une démonstration géométrique (fig. 6).

Imaginons un plan recevant la lumière contenue dans un prisme lumineux que nous supposons, pour faciliter la démonstration, à base carrée, ABCD.

Fig. 6.



Dans une première position P, nous supposons ce plan perpendiculaire aux rayons lumineux; alors, il coupe le prisme suivant sa section droite, qui est un carré $mnp s$. Si a est le côté mp de ce carré, si Q est la lumière qui passe dans le prisme, Q étant la lumière totale ou l'éclairement

total du carré, dont la surface est a^2 , son éclairement unitaire dans la position normale sera $\frac{Q}{a^2} = e$.

Cela posé, plaçons le plan dans une autre position P' faisant avec la première un angle α ; soit $p'm'n's'$ la nouvelle section ainsi faite; cette section sera rectangulaire et sa surface sera égale à $p'm' \times m'n'$. Mais mn est la projection de $m'n'$; donc on a :

$$mn = m'n' \times \cos. \alpha,$$

ou

$$m'n' = \frac{mn}{\cos. \alpha}.$$

Donc :

$$\text{Surface } p'm'n's' = mp \times \frac{mn}{\cos. \alpha} = \frac{a^2}{\cos. \alpha}.$$

Le plan P' recevant toute la lumière du prisme, l'éclairement total du rectangle $m'n'p's'$ sera toujours Q, mais sa surface est $\frac{a^2}{\cos. \alpha}$. Donc l'éclairement unitaire sera dans cette position :

$$\frac{Q}{\frac{a^2}{\cos. \alpha}} = \frac{Q \cos. \alpha}{a^2} = e'.$$

Comme l'éclairement unitaire dans la première position était $e = \frac{Q}{a^2}$, on a donc : $e' = e \cos. \alpha$. Donc l'éclairement unitaire d'une surface plane, lorsqu'elle n'est pas éclairée normalement, est égal à son éclairement unitaire quand elle l'est normalement, multiplié par le cosinus de l'angle formé par les deux positions du plan.

Mais l'angle de deux plans est égal à l'angle de leurs nor-

males ; et comme dans la première position la normale au plan est le rayon lumineux, on peut donc énoncer le théorème :

THÉORÈME.

L'éclairement unitaire d'une surface plane est proportionnel au cosinus de l'angle d'incidence des rayons lumineux.

15. RECHERCHE DES LIGNES D'ÉGALE TEINTE DANS UN CORPS DÉPOLI.

Nous avons reconnu que l'éclat apparent d'une surface dépolie ne dépendait nullement de la position du spectateur, mais uniquement du degré d'éclairement de l'objet. D'un autre côté, cet éclairement dépend de l'incidence et reste le même pour la même incidence.

Donc, *pour une surface dépolie, les lignes d'égal éclairement sont les lignes d'égal incidence.*

Le tracé des lignes de teinte reviendra donc à faire le tracé des lignes d'égal incidence, les points les plus brillants seront les points d'incidence normale, les moins brillants seront ceux d'incidence tangentielle. Les lignes seront faciles à trouver sur la sphère ; quand on les connaîtra sur la sphère, on pourra les tracer sur toute autre surface de révolution, ainsi que nous l'avons montré.

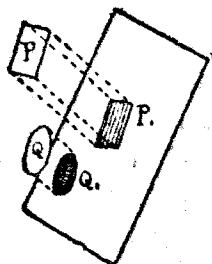
16. RAYONS DE REFLETS.

Si la lumière solaire était unique, si elle ne donnait pas lieu à des reflets, tous les points dans l'ombre seraient absolument noirs ; or il n'en est rien ; ils sont tous dans des demi-teintes d'éclat variable ; les ombres sont donc éclairées par des rayons indirects que nous nommerons *rayons de reflets*. Sans indiquer leur cause, nous mentionnerons l'expérience suivante :

17. DEUXIÈME EXPÉRIENCE (Fig. 7).

Avec une lunette tournant autour de son axe A, et prenant toutes les positions possibles, AS, AB, AC, AD, AE, AS', on explore le ciel pour étudier l'éclat qu'il présente et par suite la lumière qu'il envoie dans toutes les directions prises par la lunette ; on le verra brillant dans toutes les positions,

Fig. 8.

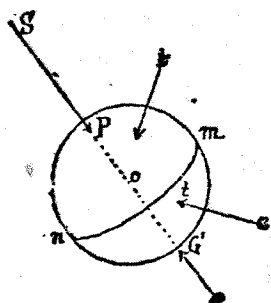


L'ombre sera plus noire si le plan qui porte ombre est plus près. En effet, s'il est près, il masquera pour le plan dans l'ombre une partie du ciel plus étendue que s'il est loin. Donc, dans ce cas, l'ombre sera moins éclairée que dans le second cas, et, par conséquent, devra paraître plus noire. Ici, l'ombre Q_1 est plus noire que l'ombre P_1 .

2^e Variations des teintes dans l'ombre propre d'une sphère.

(Fig. 9).

Fig. 9.



Soit une sphère ou plus généralement une surface arrondie quelconque ; soit SP la direction des rayons lumineux et mn la ligne d'ombre propre. En un point de la ligne mn , la normale à la sphère est perpendiculaire aux rayons lumineux, c'est-à-dire est dirigée suivant la direction des reflets lumineux *minima*. Donc la ligne d'ombre propre doit être plus noire que les autres.

Dans l'ombre propre, prenons un point t ; la normale ot sera dirigée (voir la courbe représentative) dans

une direction de reflets plus intenses que ceux qui correspondent au point m de la ligne d'ombre ; donc le point t doit être moins noir que le point m . Enfin, si nous prenons le point G' pour lequel la normale est précisément le rayon atmosphérique principal, cette normale est dirigée (voir la courbe représentative) suivant la droite qui correspond au maximum relatif ; le point G' sera le plus clair de l'ombre propre.

On se rendra donc compte de l'éclairement des ombres propres en admettant qu'il existe un rayon, le rayon *atmosphérique principal*, l'emportant de beaucoup sur les autres (ce qui n'est pas exact), directement opposé au rayon lumineux, et traçant dans les ombres les courbes d'égale teinte qui correspondraient à ce rayon atmosphérique principal. On voit que ce seront les mêmes que celles du rayon direct.

3^o Des intensités des teintes sur une sphère dont une partie est dans l'ombre portée (Fig. 10).

Soit une sphère et un plan situé au-devant et très-près d'elle, la mettant complètement dans l'ombre. Traçons la courbe d'ombre propre mn comme si le soleil l'éclairait. Toute la portion située en m,n,p , dans ce qui eût été l'ombre propre ne se ressent en rien de l'influence du plan Q et par conséquent sera éclairée par les reflets comme elle l'eût été si l'autre moitié smn n'eût pas été dans l'ombre. Seulement, à cause du contraste avec le noir qui sera en s,m,n , elle paraîtra plus claire que si la même portion s,m,n eût été très-brillante.

Prenons au contraire un point t situé dans l'autre portion ; celle qui eût été en lumière sans l'écran. Tous les rayons indirects qui viendraient de la partie du ciel cachée par l'écran font défaut. Ceux qui viennent de l'autre côté frappent plus obliquement le point t que le point m , et, à *fortiori*, que le point p . Donc le point t sera plus sombre que le point m , et, plus nous nous rapprocherons du point s , qui, sans l'écran, eût été le plus brillant, plus les points seront noirs.

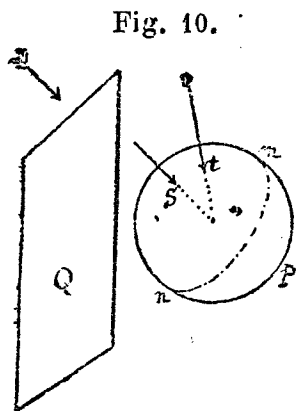
Nous pouvons donc dégager de cette étude les principes suivants :

20. PRINCIPES POUR LES CORPS DÉPOLIS.

1^o Dans la lumière, les lignes d'égale teinte sont les lignes d'égale incidence du rayon direct ; elles sont d'autant plus claires que l'incidence est plus petite, c'est-à-dire plus près d'être normale.

2^o Dans les ombres propres, les lignes d'égale teinte sont les lignes d'égale incidence du rayon atmosphérique principal, et comme ce rayon est directement opposé au rayon direct, les lignes d'égale incidence sont les mêmes pour les deux rayons. La ligne d'ombre propre est la plus noire des lignes situées dans l'ombre propre ;

3^o Dans l'ombre portée, les lignes d'égale teinte sont aussi les lignes d'égale incidence du rayon direct ; elles sont d'autant plus noires qu'elles eussent été plus blanches si l'objet n'eût pas été dans l'ombre.



Remarque. Ces principes ne sont peut-être pas l'expression tout à fait exacte des faits ; ils seraient vrais pour un objet placé dans l'espace, comme un aérostat, et suffisamment éloigné du sol pour qu'il n'en puisse recevoir de reflets, et que l'on puisse considérer la masse d'air existant entre lui et le sol comme infinie. Mais ils ont l'avantage d'être très-simples et de permettre de tracer du même coup les lignes d'égale teinte dans l'ombre et dans la lumière, ce qui est un avantage considérable ; comme ils donnent des effets très-satisfaisants, nous les adopterons d'une manière absolue dans ce cours élémentaire.

21. CORPS POLIS.

Les corps parfaitement polis sont ceux qui réfléchissent la lumière, c'est-à-dire qui renvoient dans une direction donnée, et non dans tous les sens, les rayons qu'ils reçoivent. Ils réfléchissent la lumière au lieu de la diffuser ; l'étude de la réflexion est du domaine de la physique, cependant nous avons besoin d'en rappeler ici les faits principaux.

22. LOIS DE LA RÉFLEXION.

Lorsqu'un rayon incident rencontre une surface polie, il se réfléchit.

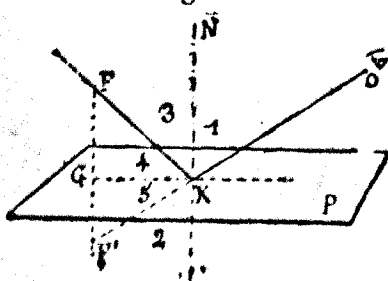
1° Le rayon incident et le rayon réfléchi sont dans un même plan avec la normale à la surface ;

2° L'angle d'incidence (angle du rayon incident avec la normale) est égal à l'angle de réflexion (angle du rayon réfléchi avec la normale).

23. RÉFLEXION SUR UNE SURFACE PLANE (Fig. 11).

Soit P un plan poli, F un flambeau envoyant des rayons dans toutes les directions, O l'œil supposé situé à une distance finie.

Fig. 11.



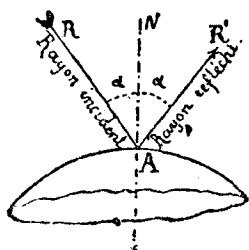
Cherchons comment le plan renvoie les rayons à l'œil.

Du point F, abaissons une perpendiculaire sur le plan, et prolongeons-la en F', d'une quantité $F'G = FG$; joignons OF' ; cette droite rencontre en K ce plan ; joignons KF. Si, par le point K, on mène la normale KN au plan, les

lignes FK et KO sont avec cette normale dans un même plan ; l'angle 1 est égal à l'angle 2 comme son opposé par le sommet. Mais l'angle 2 est égal à l'angle 3 comme complément des angles égaux par symétrie, 4 et 5.

Donc, angle 1 = angle 3. Donc le rayon FK se réfléchit en O ;

Fig. 11 bis.



le rayon FK est celui qui, après réflexion, vient passer par l'œil. Il semble venir en ligne droite du point F' symétrique de F, et comme il en sera de même quelle que soit la position de l'œil, les rayons réfléchis seront comme s'ils venaient tous du point F'. Ce point F' est ce que l'on nomme *l'image* du flambeau.

24. ASPECT D'UN PLAN PARFAITEMENT POLI ÉCLAIRÉ PAR UN FLAMBEAU UNIQUE.

Ce plan nous donnera l'image du flambeau et rien de plus, s'il est parfaitement poli, puisqu'il n'y aura que le rayon FK qui parviendra à notre œil et que tous les autres n'y atteindront pas ; ce fait est parfaitement vrai. Placez dans une chambre obscure, peinte au noir de fumée pour éviter les reflets, placez-y une glace ; il sera impossible d'en soupçonner l'existence, si ce n'est par l'image des objets qui s'y réfléchiront.

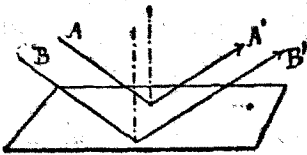
Les oiseaux, les insectes viendront en volant se frapper la tête sur les glaces parce qu'il leur sera impossible d'en soupçonner l'existence.

S'il existait plusieurs flambeaux, on verrait séparément leurs images ; si nous avons une ligne lumineuse constituant une série de flambeaux, nous verrions l'image de cette ligne lumineuse. Enfin, si nous avons un ciel lumineux, nous verrions par réflexion une grande nappe blanche qui donnerait l'image du ciel.

25. ASPECT D'UN PLAN POLI ÉCLAIRÉ PAR DES RAYONS PARALLÈLES, DIRIGÉS DANS UNE SEULE DIRECTION ET REGARDÉ AVEC DES RAYONS VISUELS PARALLÈLES C'EST-A-DIRE L'ŒIL ÉTANT PLACÉ A L'INFINI (Fig. 12.).

Les rayons lumineux A, B, seront réfléchis en A', B' parallèles

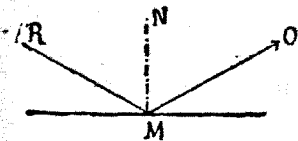
Fig. 12.



lumineux ; autrement, il n'en recevra aucun et le plan lui paraîtra obscur.

26. ASPECT D'UN PLAN POLI ÉCLAIRÉ PAR DES RAYONS PARALLÈLES VENANT DANS TOUTES LES DIRECTIONS, L'ŒIL ÉTANT À L'INFINI (Fig. 13).

Fig. 13.

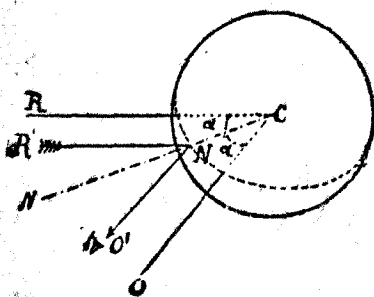


C'est le cas de la lumière solaire directe jointe aux lumières indirectes que nous avons étudiées plus haut. L'œil ne recevra des rayons directs ou indirects que ceux qui, après réflexion, seront renvoyés parallèlement aux rayons visuels. Il est facile de les trouver ; en effet, soit P le plan, O la direction des rayons visuels ; menons une normale au plan MN et prenons la direction RM qui forme avec cette normale un angle égal à l'angle formé par les rayons visuels ; RM sera la direction de ces rayons.

Si MR correspond à une direction de rayons brillants, le plan paraîtra très-éclairé. Si MR n'était pas la direction des rayons lumineux, le plan paraîtrait sombre.

27. ASPECT D'UNE SPHÈRE POLIE ÉCLAIRÉE PAR DES RAYONS PARALLÈLES, DIRIGÉS DANS UNE SEULE DIRECTION, L'ŒIL ÉTANT À L'INFINI (Fig. 14).

Fig. 14.



Par le centre C de la sphère, menons un rayon lumineux RC, un rayon visuel CO, et, dans le plan de ces deux rayons, la bissectrice CN de l'angle qu'ils forment. N étant le point de sortie de cette bissectrice, le rayon R'N, qui frapperait en N, serait réfléchi dans le plan de la normale au point N, en faisant un angle de réflexion N'NO' égal à l'angle

d'incidence $R'NN'$; il sera donc réfléchi parallèlement aux rayons visuels, et aperçu par l'œil, tandis que tout autre ne le sera pas. Donc le point N sera l'image de la source lumineuse ; on dit que le point N est le *point brillant* de la direction lumineuse. Si cette source est unique, le seul point N sera apparent, tous les autres seront sombres, et la sphère ne semblera avoir d'existence qu'au point N .

Remarque. — La direction NN' , bissectrice de l'angle des rayons visuels et des rayons lumineux, se nomme la *direction normale*.

28. ASPECT D'UNE SPHÈRE POLIE ÉCLAIRÉE PAR DES RAYONS PARALLÈLES, DIRIGÉS DANS TOUTES LES DIRECTIONS, L'ŒIL ÉTANT PLACÉ À L'INFINI (Fig. 14).

C'est le cas d'une sphère éclairée par la lumière solaire directe et toutes les lumières indirectes. Chaque direction de rayons donnera son point brillant ; comme ils sont en nombre infini, il y aura une infinité de ces points brillants ; seulement, ils n'auront pas le même éclat ; pour avoir les lignes d'égale teinte sur une pareille sphère, il faudra :

1° Classer les rayons indirects d'après leurs différences d'éclat, ce qu'on fait par la courbe représentative indiquée plus haut, et grouper ensemble tous ceux qui ont la même intensité ;

2° Chercher les rayons indirects d'égale intensité ; ils se placent symétriquement par rapport au rayon principal ; si OA est un de ces rayons indirects, tous ceux qui, comme OA' OA'' , formeront le même angle avec le rayon principal SO auront la même intensité, et formeront un cône ayant SO pour axe ; (fig. 7.

3° Chercher les points brillants de chacun de ces rayons d'égale intensité par la méthode donnée plus haut ; ce seront des points d'égal éclat, et la ligne qui les joindra sera une ligne d'égale teinte.

Remarque. — On voit que ce tracé est compliqué ; nous ne le ferons pas. D'abord, il ne donnerait rien de bien vrai comme effet, attendu que, dans la nature, les corps dépolis donnent non-seulement les images du ciel, mais les images, déformées par les courbures, des objets qui sont aux environs ; ce qui rend l'aspect fidèle des corps polis impossible à rendre autrement qu'en faisant comme les peintres, c'est-à-dire en les plaçant dans les positions qu'ils doivent occuper, et en les copiant.

29. CORPS IMPARFAITEMENT POLIS OU MI-POLIS.

Ils participeront des corps polis et des corps dépolis ; les lumières intenses s'y réfléchissent plus qu'elles ne s'y diffusent et les lumières faibles font le contraire. Une lumière très-intense donnera lieu sur leur surface à une image brillante comme s'ils étaient polis, c'est-à-dire s'y réfléchira. Une lumière faible les éclairera en se diffusant, mais sans se réfléchir sensiblement, comme sur un objet mat. Si le soleil éclaire ces corps, nous chercherons donc sur eux le point brillant par la méthode de la bissectrice et de la direction normale, comme nous venons de le faire pour la sphère polie (fig. 14).

Nous tracerons l'ombre propre comme s'il était mat, puis nous adopterons une série de courbes d'égale teinte qui tiendront le milieu entre celle des corps mats et celle des corps polis. Cette construction devra nous donner exactement le point brillant des corps polis.

La ligne d'ombre propre sera la même pour les corps mats ou pour les corps mi-polis ; quant aux lignes de teintes sur les corps mi-polis, elles seront d'autant plus rapprochées de celle des corps mats qu'elles correspondraient à des points moins éclairés.

On sait quelle construction nous avons adoptée pour tracer les lignes d'égale teinte sur une sphère mi-polie ; nous comprenons maintenant les raisons qui nous l'ont fait adopter.

30. USAGE DES CORPS POLIS OU DÉPOLIS.

En architecture, les pierres, le bois sont considérés comme dépolis, les marbres, les métaux comme mi-polis.

En dessin de machines, tous les métaux sont faits, sauf rares exceptions, comme étant mi polis.

31. CORPS MI-POLIS DANS L'OMBRE PORTÉE.

Bien qu'à proprement parler, les mêmes principes que pour les corps mats ne s'appliquent plus, nous procéderons cependant de même, afin de simplifier les combinaisons. Ainsi :

1^o Dans les ombres portées, les courbes d'égale teinte déterminées comme si le corps était resté dans la lumière.

2^o Les zones seront d'autant plus noires qu'elles plus claires si elles eussent reçu directement la lumière.

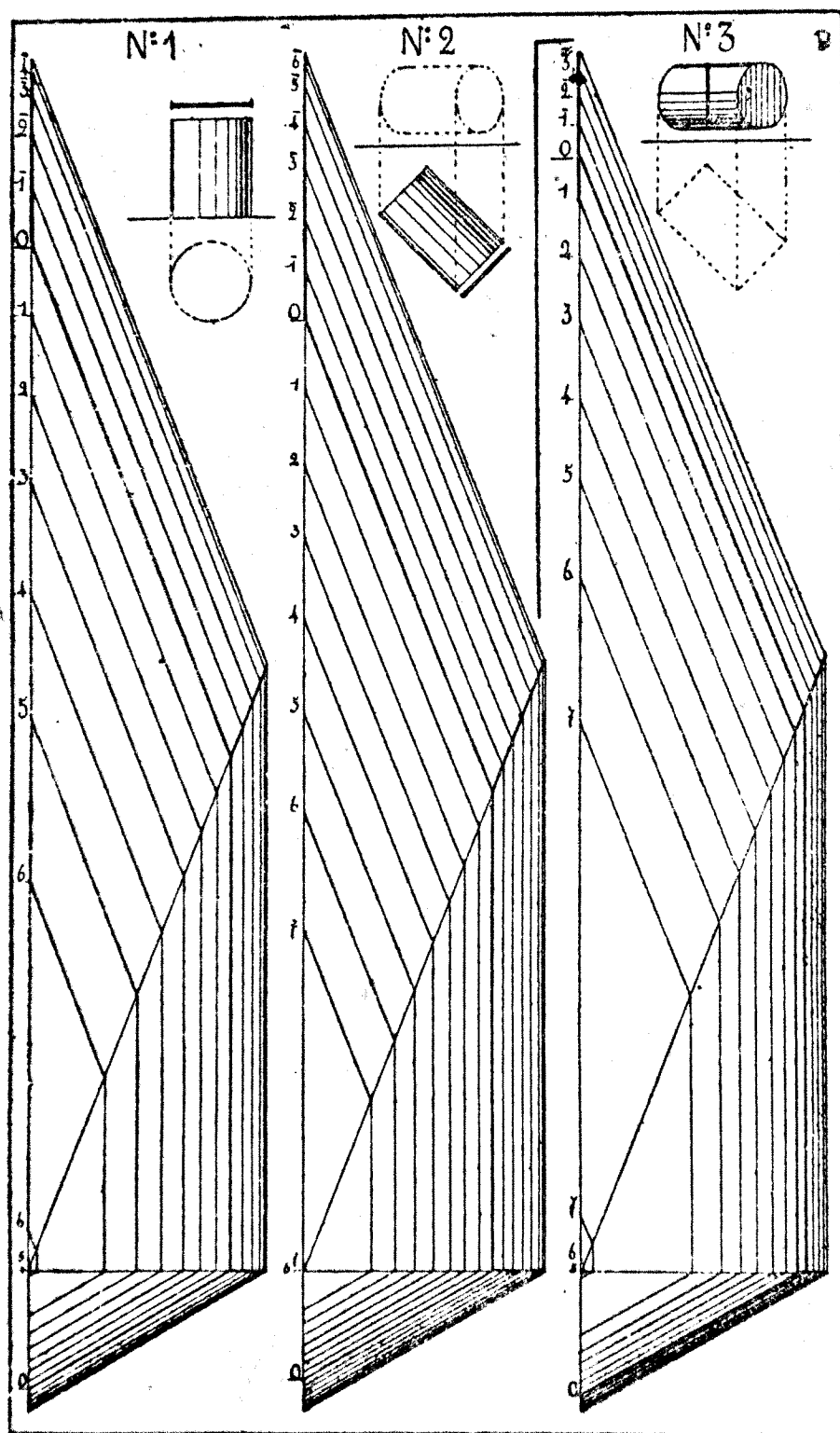
32. TRAVAIL DES ÉLÈVES.

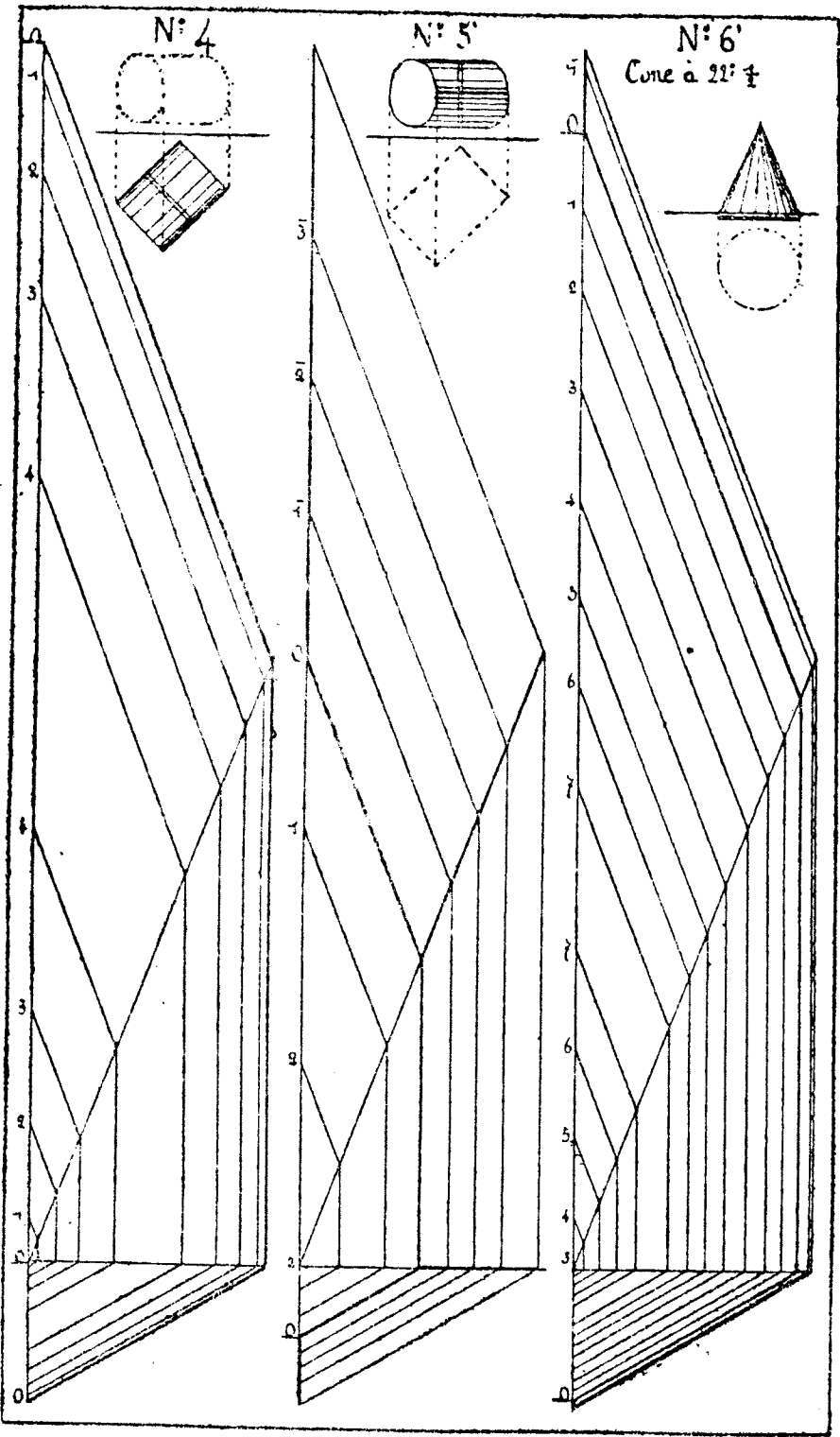
Pendant les deux semaines qui correspondent aux leçons 17 et 18, les élèves exécuteront la planche 11 dont on a donné l'explication à la 16^e leçon

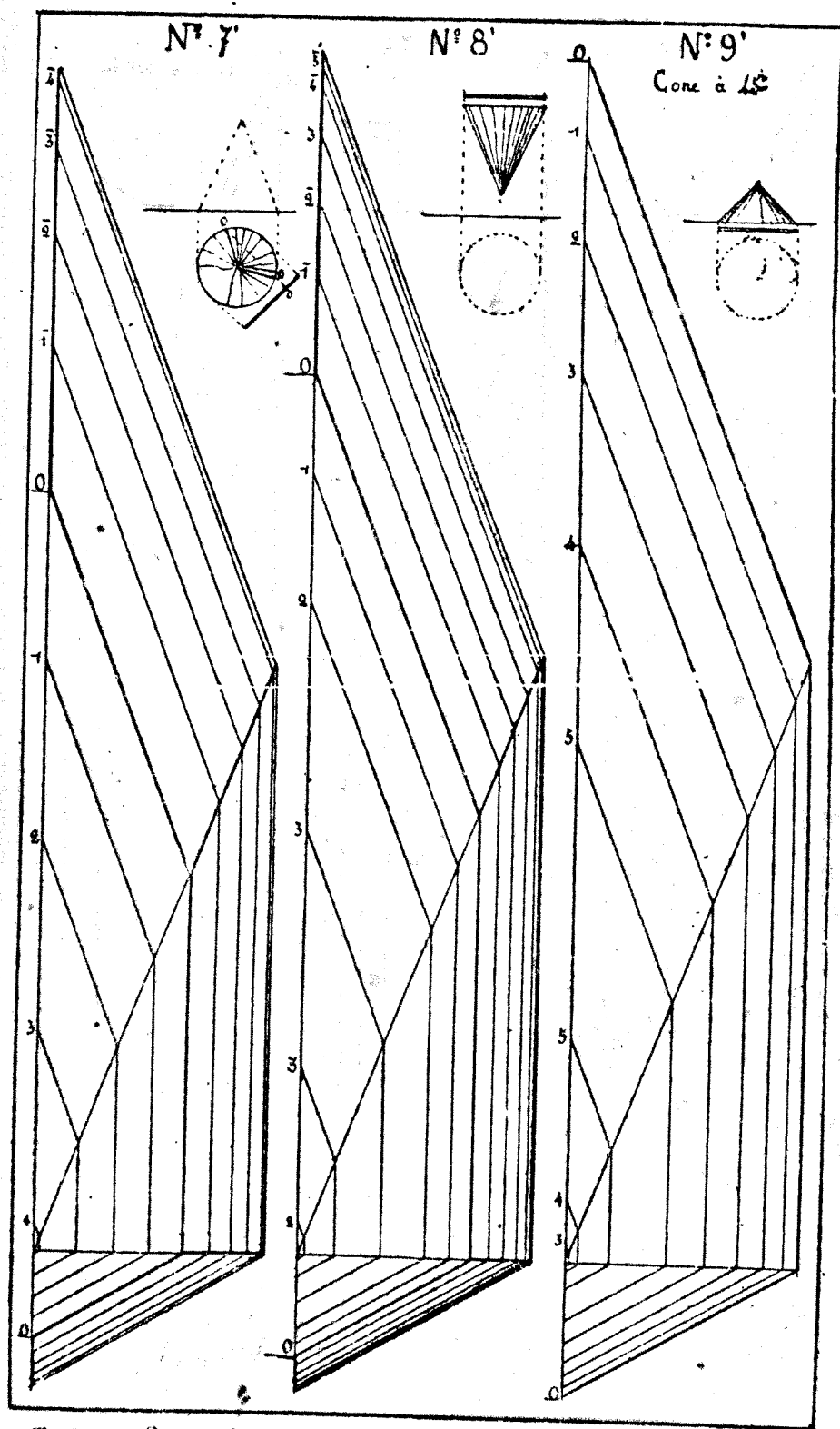
FIN DE LA 1^{re} PARTIE DU COURS DE 3^e ANNÉE.

ÉCHELLES DE TEINTES

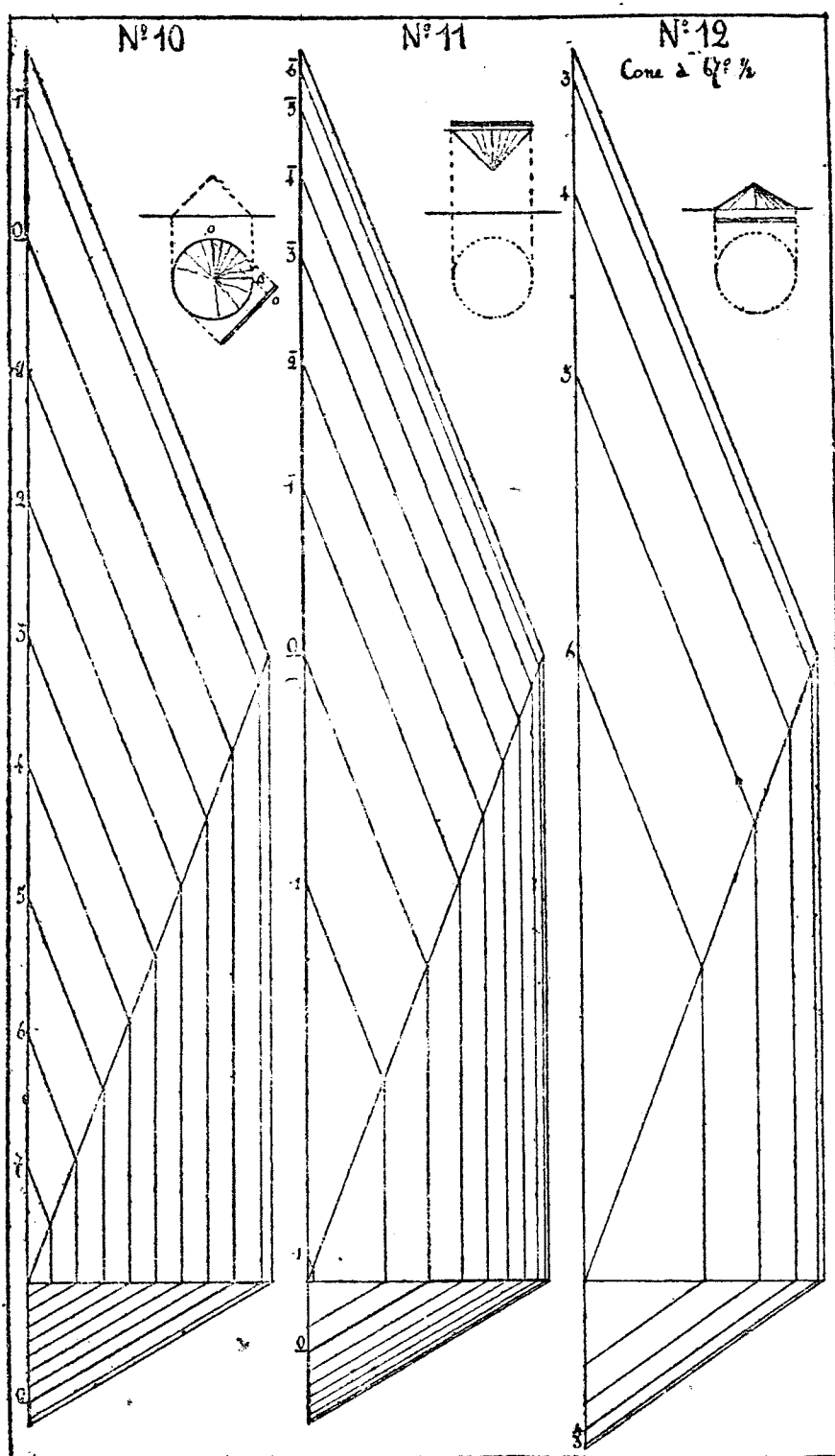
.CORPS DÉPOLIS.

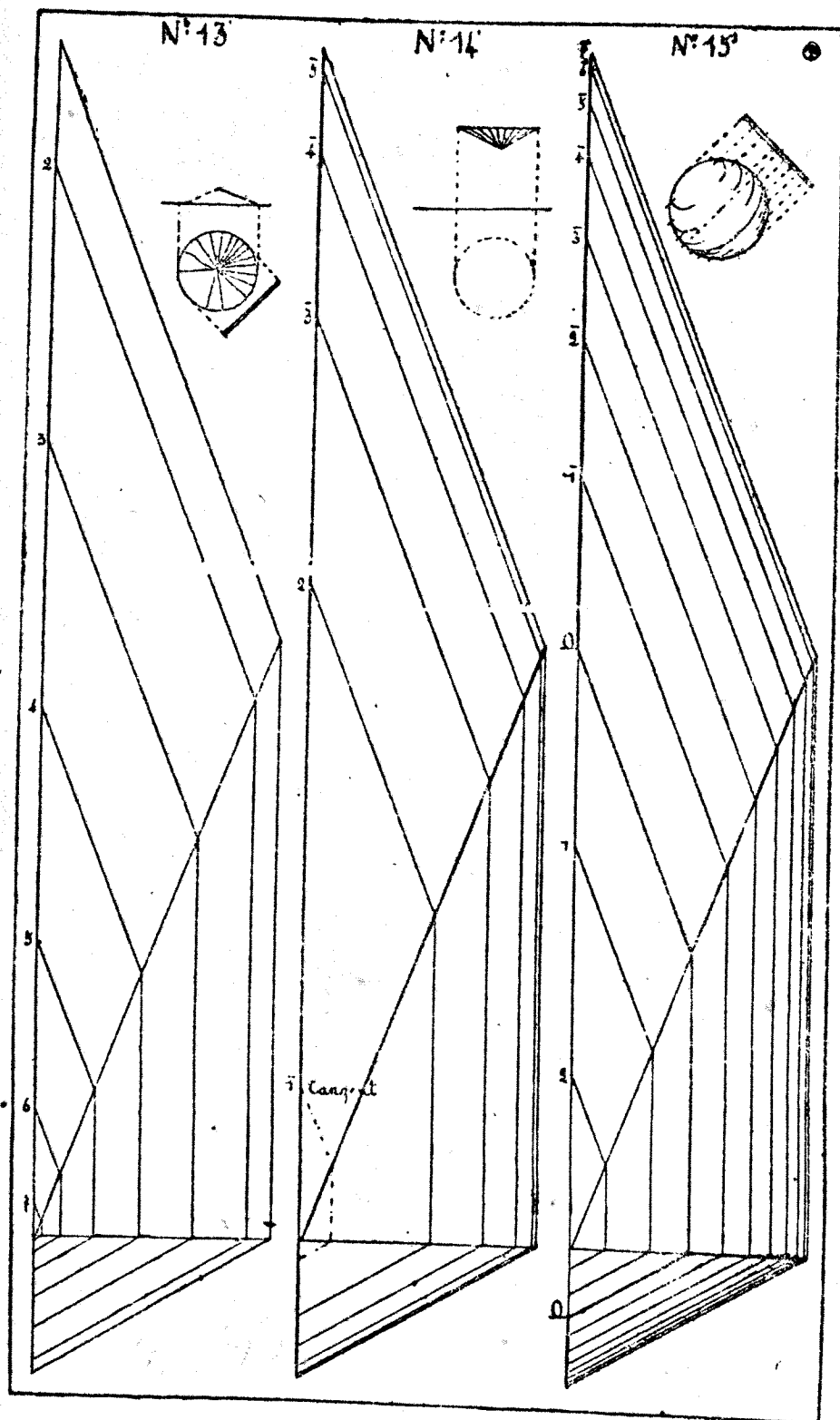






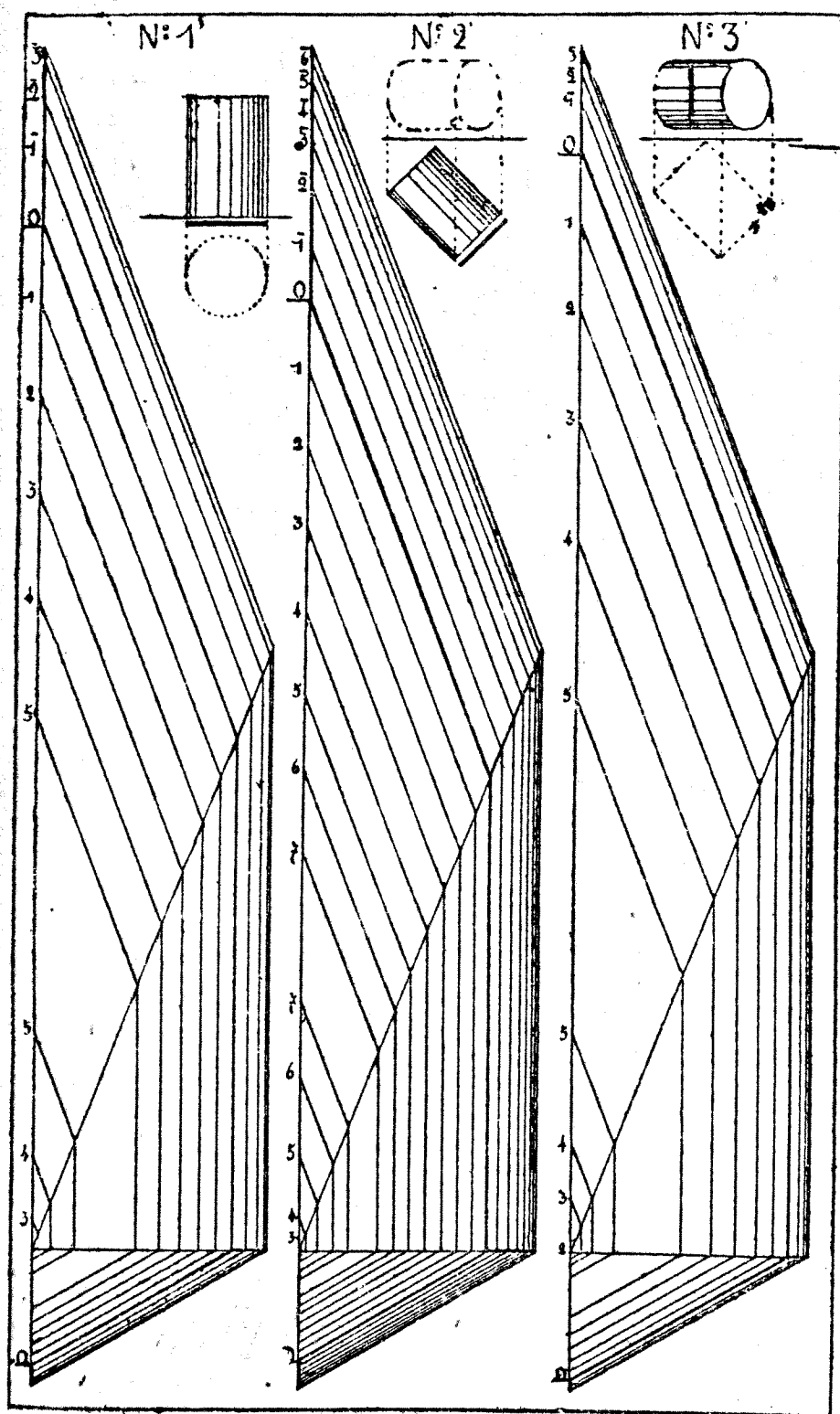
T. P. — 3 ANNÉE.

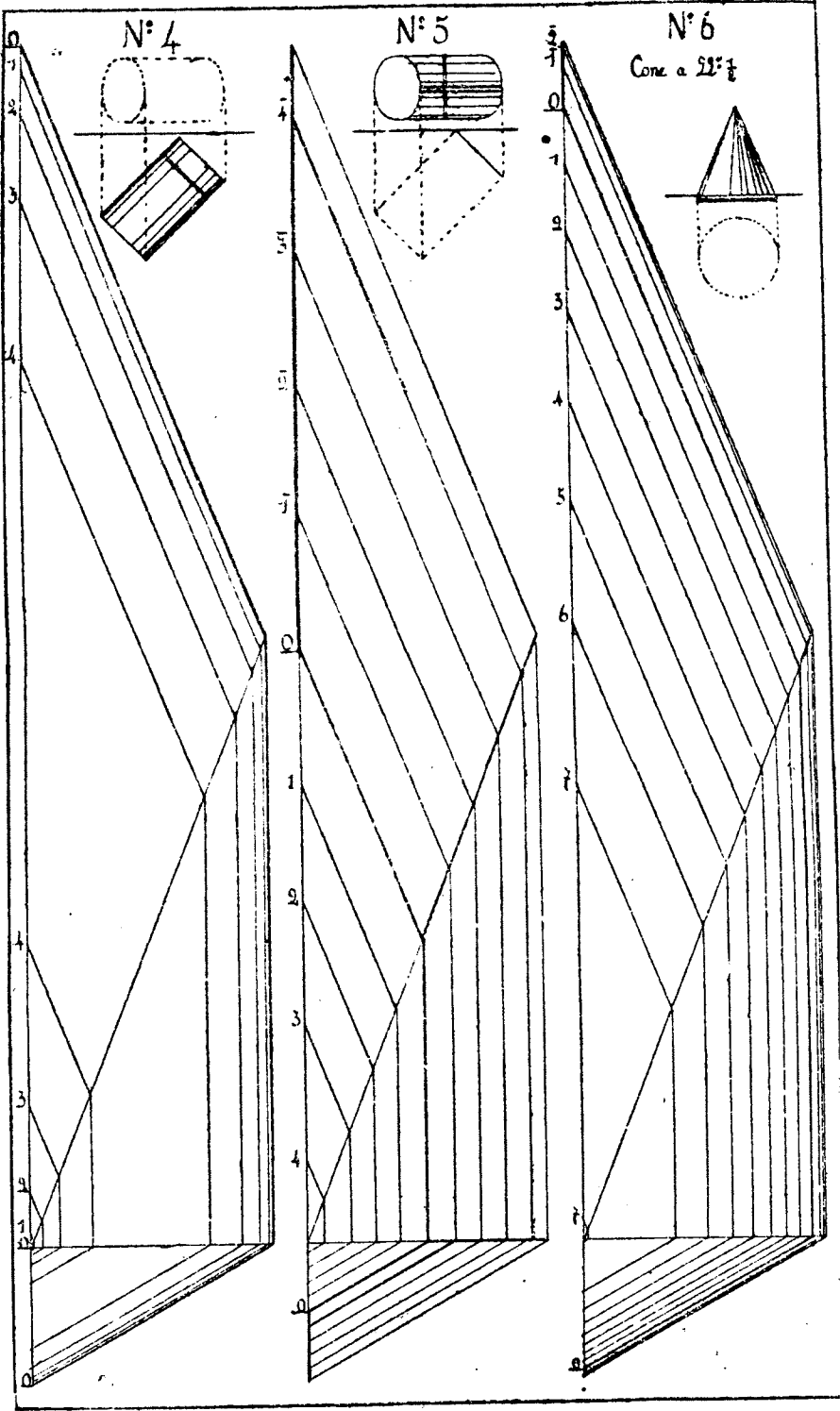


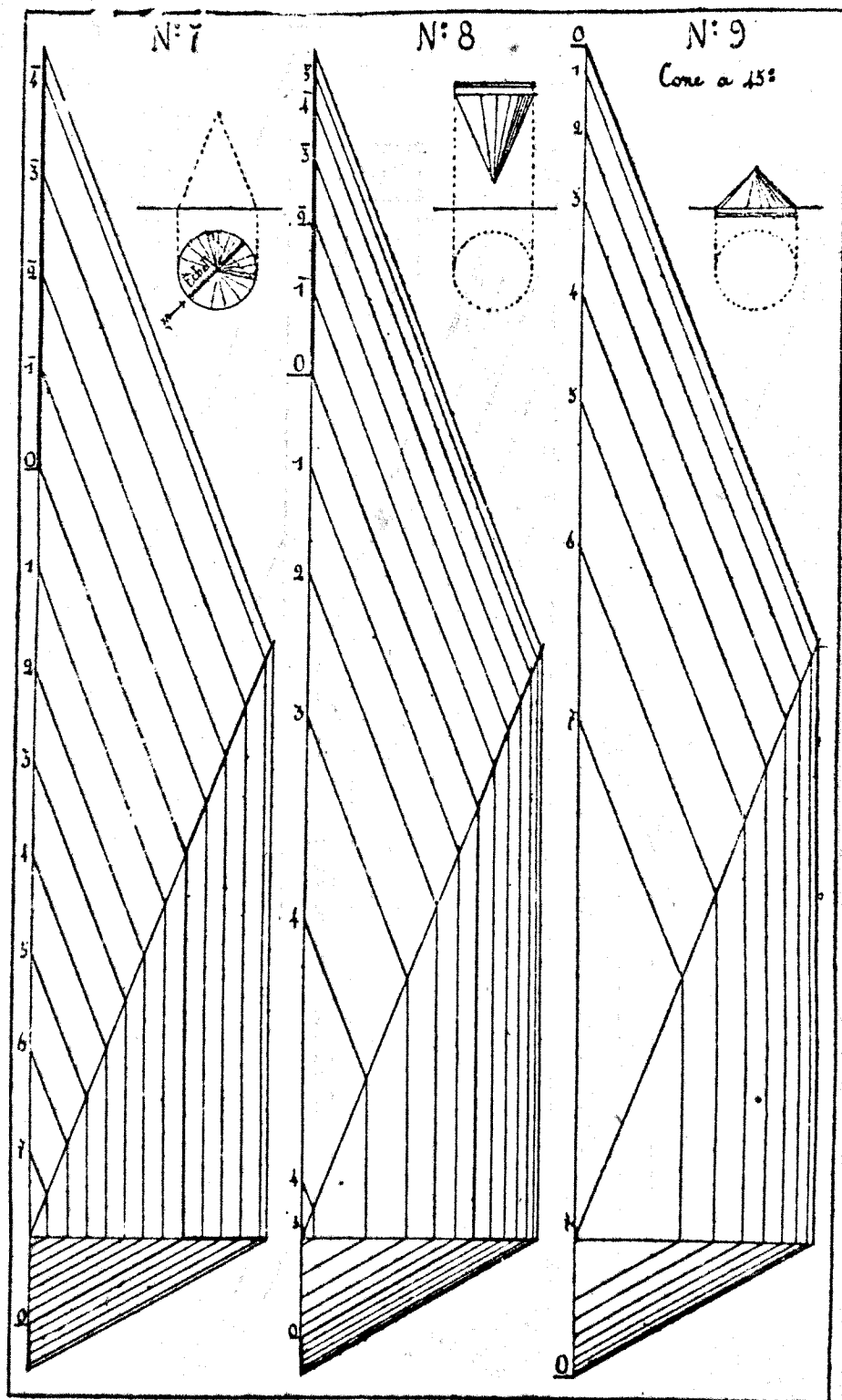


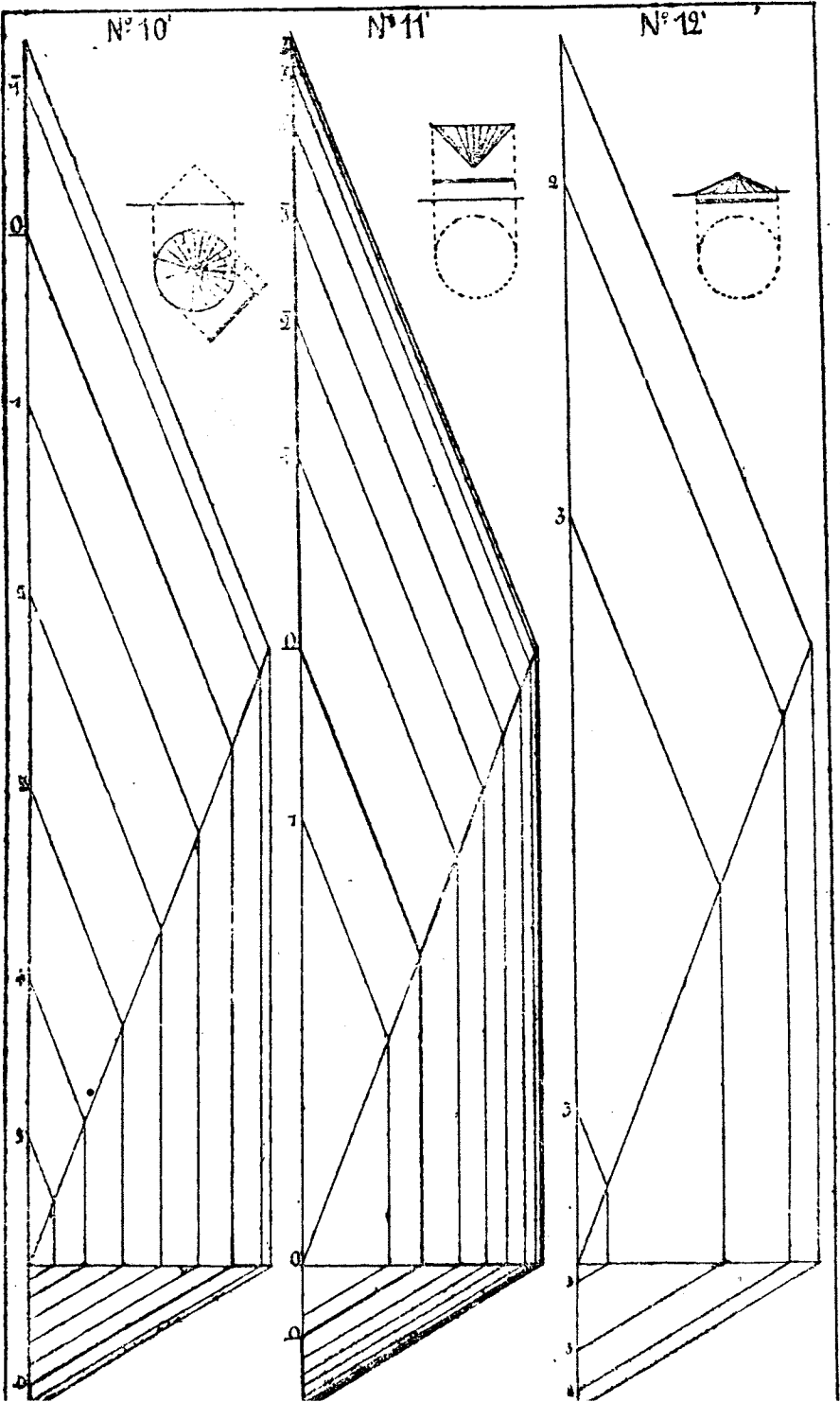
ÉCHELLES DE TEINTES

CORPS MI-POLIS









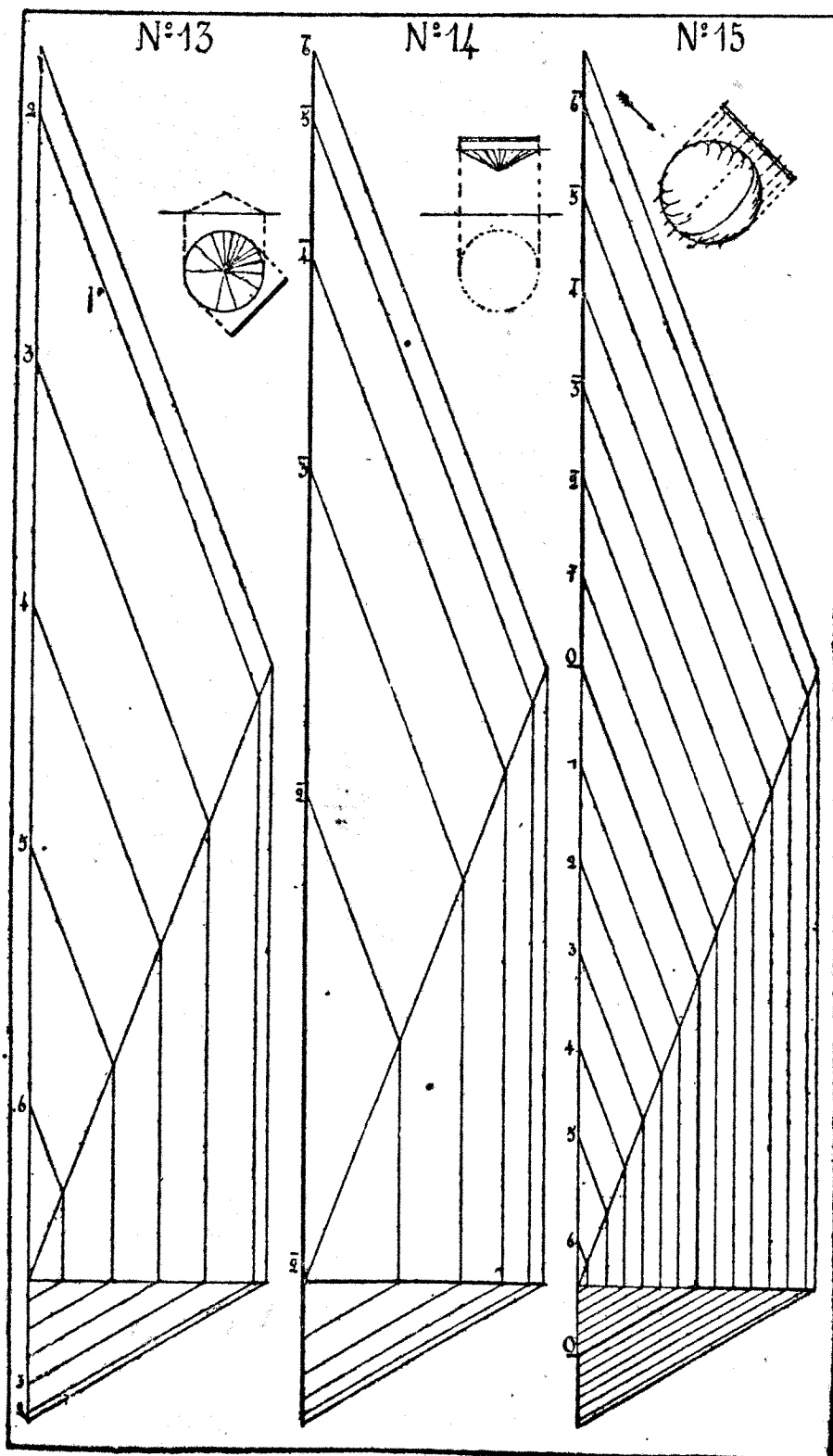


TABLE DES MATIÈRES.

Numéros d'ordre.		Pages.
PRÉFACE		1
1^{re} LEÇON. — Ombres. — Généralités.		
1 à 2.	Objet du cours. — Ordre des leçons. — Croquis. — Mises au net	1
3 7.	La lumière. — Corps lumineux par eux-mêmes. — Corps éclairés. — Corps dans l'ombre. — Corps opaques ou transparents	2
8.	Lumière directe. — Reflets et lumière indirecte	3
9.	But de la théorie des ombres et de la théorie du lavis	3
10.	Propagation de la lumière	3
11 12.	Lumière au flambeau ou à rayons divergents. — Lumière au soleil ou à rayons parallèles	4
13 15.	Cône d'ombre d'une portion de surface ou d'un corps solide, dans le cas de la lumière au flambeau. — Remarque évidente. — Pyramide d'ombre	5
16 17.	Lumière au soleil, cylindre d'ombre. — Prisme d'ombre.	7

Méthodes générales pour la recherche des ombres.

18 à 21.	Méthode des plans sécants. — Application à l'ombre d'un tore. — Points de passage. — Problème	8
22 25.	Méthode des surfaces circonscrites. — Théorème sur les surfaces circonscrites. — Pratique de la méthode	11
26.	Courbes-enveloppes. — Définitions	13

nos d'ordre.

pages.

27	30.	Méthode des ombres portées et des enveloppes. — Application de cette méthode. — Trouver par la méthode des ombres portées l'ombre d'une surface sur une autre. — Point de perte	14
	31.	Travail des élèves pour la prochaine leçon . .	17

2^e LEÇON. — *Ombres propres du cône, du cylindre
et de la sphère.*

1 à	6.	Le rayon à 45° et le cube de lumière. — Pro- jections du rayon à 45°. — Rabattements du rayon à 45°. — Rayon rendu par rotation, parallèle au plan vertical. — Rayon rabattu sur le plan horizontal et sur le plan vertical.	18
	7.	L'angle ϕ . — Equerre à l'angle ϕ	21
8	9.	Ombre propre d'un cylindre quelconque. — Epure de l'ombre propre d'un cylindre quel- conque	21
10	11.	Ombres de cylindres à génératrices parallèles aux arêtes du cube. — Ombres des moulures. — Remarque pratique sur la position de la ligne d'ombre d'un cylindre	23
12	13.	Ombre propre d'un cône quelconque. — Epure.	25
	14.	Ombres propres de cônes à axes parallèles aux arêtes du cube. — Cône à angle plus grand que 45°. — Cône à 45°. — Cône à l'angle ϕ . — Cône à angle plus petit que ϕ	26
15	17.	Ombre propre de la sphère. — Epure de l'ombre propre d'une sphère éclairée par des rayons parallèles au plan vertical. — Sphère éclairée par le rayon à 45°. — Re- marques pratiques	28
	18.	Usage de la sphère pour la détermination de l'ombre des cônes et des cylindres dans des positions quelconques	30
	19.	Travail des élèves	

3^e LEÇON. — *Ombres propres des corps ronds.*

1 à	3.	Ombre propre de l'ellipsoïde. — Représentation de l'ellipsoïde et, en général, de toute surface de révolution. — Définitions. — Méridiens.
-----	----	--

TABLE DES MATIÈRES.

263

nes d'ordre.

pages.

	— Méridien de profil. — Méridien de symétrie à 45°. — Parallèles.	33
4.	Contours apparents d'une surface de révolution. — Contour apparent vertical et horizontal	35
5	8. Ombre propre d'un ellipsoïde de révolution. — Points sur le contour apparent vertical et sur le méridien de profil. — Sur le contour apparent horizontal. — Remarque sur le point d'ombre situé sur les contours apparents d'une surface quelconque	37
9	10. Points le plus haut et le plus bas. — Points situés dans le méridien de symétrie à 45°.	39
	11. Résumé. — Tracé de l'ombre en projection verticale et en projection horizontale	40
	12. Ombre propre d'un tore. — Représentation de cette surface	41
	13. Ombre extérieure. — Points sur le contour apparent vertical, sur le méridien de profil, sur le grand contour apparent horizontal. — Points le plus haut et le plus bas	42
	14. Ombre intérieure. — Points sur le contour apparent vertical, sur le méridien de profil, sur le contour apparent horizontal. — Points le plus haut et le plus bas.	43
	15. Points de passage de l'ombre intérieure, et courbe d'ombre autoportée	44
	16. Travail des élèves pour la prochaine leçon	45

4^e LEÇON. — *Théorie du lavis. — Lignes de teintes sur la sphère.*

1 à	3. Principes généraux de la théorie du lavis. — Principe des orientations. — Corps polis et dépolis	46
4	7. Etude de la sphère. — lignes de teintes sur la sphère dépolie. — Point clair. — Ombre propre	47
3	10. Digression. — Tracé des ellipses à la bande de papier, par la somme des axes. — Autre tracé, par la différence des axes. — Tracé des ellipses par échelles, connaissant les deux axes ou deux diamètres conjugués	49
	11. Lignes d'égale incidence sur la sphère. — Ce	

nos d'ordre.		pages.
	sont des cercles projetés suivant des ellipses	52
12	14. Construction d'une de ces ellipses, le rayon lumineux étant parallèle au plan vertical et incliné à l'angle φ . — Points des ellipses sur le contour apparent. — Sphère remise dans la position ordinaire.	54
15	17. Sphère mi-polie. — Rayons visuels. — Point brillant. — Ligne d'ombre propre, lignes d'égale teinte. — Ce sont des ellipses en projection	55
19	22. Tracé d'une de ces ellipses en projection horizontale. — Points sur le contour apparent. — Tracé des autres ellipses. — Dimensions.	58
	23. Travail des élèves pour la prochaine leçon	59

5^e LEÇON. — *Théorie du lavis, échelles de teintes.*

1 à	2. Echelles de teintes, but de la leçon. — Généralisation du principe des surfaces circonscrites.	60
	3. Application à la recherche des lignes d'ombre et de teintes d'un cône ou d'un cylindre	61
4	6. Cylindres à génératrices parallèles aux arêtes du cube. — Tracé et usage de l'échelle de teintes et de l'échelle de proportion. — Cylindres auxquels s'applique cette échelle n° 1. — Cylindres en relief et cylindres en creux. — Echelles renversées	62
7	8. Cylindres à 45°, en lumière. — Echelles n° 2 et n° 3. — Cylindres en creux ou en relief auxquels s'appliquent ces échelles	65
	9. Cylindres à 45°, dans l'ombre. — Echelles n° 3 et n° 4	67
	10. Cônes ; leur classification	68
11	12. Cône à 22° 1/2. — Pointe en haut et pointe en bas, en relief et en creux. — Echelles n° 5, n° 6, n° 7, droites ou renversées.	69
	13. Autres cônes. — Echelles 9, 10, 11, 12, 13, 14.	72
	14. Usage des échelles pour tracer les lignes de teintes sur une surface de révolution, en élévation	75
	15. Tracé des lignes de teintes sur une sphère quelconque au moyen des échelles	76

nos d'ordre.

pages.

16.	Echelle des contours apparents circulaires. —	
	Echelle n° 15	74
17.	Objet de la planche 5. — Travail des élèves. .	76
6 ^e LEÇON. — <i>Couleurs et pose des teintes.</i>		
1 à 6.	Objet de la leçon. — Principe des couleurs. — Tons simples et purs. — Tons rabattus et tons éclaircis. — Tons composites de 1 ^{er} , de 2 ^e ou de 3 ^e ordre, purs, rabattus ou éclaircis.	78
7	9. Couleurs complémentaires. — Lavis en ca- maïeu, c'est-à-dire fait avec un seul ton. — Rendre des couleurs à l'aide de l'encre de Chine seule.	80
	10. Couleurs dont on se servira dans le cours. — Teintes conventionnelles	81
11	13. Causes de la couleur des objets. — Surface sa- turée. — Position d'éclairage à saturation, à sous-saturation et à sur-saturation. — Orientations sous-saturées et sur-saturées .	82
	14. Classification des zones de teintes. — Zone brillante. — Zones claires. — Zone moyenne ou saturée. — Zones en demi-teintes. — Zones d'ombre propre. — Zones d'ombres portées	83
	15. De l'intensité et de la transparence des teintes.	85
16	18. Théorème sur les teintes superposées. — Effet dû à la superposition d'un nombre n , de teintes égales entre elles. — Effet d'une teinte donnée sur deux teintes primitives, l'une faible, l'autre forte	86
19	24. Classification des teintes. — Ordre de pose des teintes, leur transparence. — La teinte d'é- bauche. — Teintes d'ombre propre. — Teintes de couleurs. — Teintes d'ombres portées. Remarque sur la différence d'éclat de la zone brillante dans la sphère et dans le cylindre.	87
	25. Travail des élèves pour la prochaine leçon. .	91

7^e LEÇON. — *Ombres portées sur le plan vertical ou sur des plans parallèles.*

n.° d'ordre.	pages.
1 à 4. But de la leçon. — Ombre d'un point. — Remarque fondamentale. — Ombre d'une droite verticale ou horizontale; ombre d'un rectangle	92
5. Ombre portée par une figure plane parallèle au plan vertical	93
6. Ombre d'une droite perpendiculaire au plan vertical	94
7. Ombre d'une droite quelconque.	95
8. L'ombre portée sur un plan, par un objet, est une projection oblique de cet objet sur ce plan. — Remarques diverses communes aux projections droites et obliques	96
9 10. Ombre d'un cube à arêtes parallèles à celles du cube de lumière. — Remarques sur les ombres portées par les carrés qui forment les faces	97
11 15. Ombre du cercle, — cette ombre sera le plus souvent, une ellipse. — Ombre d'un cercle de front, — d'un cercle horizontal, — d'un cercle situé dans un plan de profil	99
16. Ombre d'un cercle situé dans un plan perpendiculaire au plan horizontal, mais oblique au plan vertical	102
17. Ombre d'un cercle situé dans un plan, simplement perpendiculaire au plan vertical	102
18. Travail des élèves pour la prochaine leçon.	103

8^e LEÇON. — *Ombres portées sur le plan vertical ou sur des plans parallèles. (Suite.)*

1. Application. — Ombre portée par les arcades d'un portique sur le mur du fond de ce portique.	104
2. Problème I. — Ombres portées par deux cercles parallèles au plan vertical et placés l'un devant l'autre.	104
3. Problème II. — Ombres portées par deux cercles de profil	105

TABLE DES MATIÈRES.

267

nos d'ordre.

pages.

4 à 8.	Ombre du portique. — Ombre des dés de couronnement sur le toit. — Ombre de la corniche sur le mur de face du portique. — Ombres des corniches sur le mur du fond. — Ombre du dernier dé sur le mur du fond	106
9.	Du ressaut des ombres.	109
10.	Ressauts de l'ombre portée par une droite parallèle à la ligne de terre, sur une série de plans parallèles au plan vertical.	109
11.	Ombre portée par une droite parallèle à la ligne de terre, sur une série de moulures perpendiculaires au plan horizontal.	111
12.	Ombre portée sur des moulures parallèles à la ligne de terre par une droite perpendiculaire au plan horizontal	112
13.	Travail des élèves	113

9^e LEÇON. — *Ombres portées sur les cylindres en relief.*

1.	Différentes positions de cylindres.	114
2 à 3.	Ombre portée sur un cylindre vertical, par un point, — par une droite parallèle aux génératrices du cylindre.	115
4 7.	Autres positions de droites portant ombre en ligne droite sur un cylindre. — Généralisation. — Lignes courbes portant ombre en ligne droite sur un cylindre. — Projections des lignes qui portent ombre en ligne droite sur un cylindre	116
8 10.	Ombre portée par une droite parallèle à la ligne de terre. — Ombre portée par un point (2 ^e méthode), sans avoir recours au plan. — Ombre portée par une droite perpendiculaire au plan vertical	118
11 13.	Application à la figure 1 de la planche 7. — Ombre du tailloir sur le cylindre et sur le mur. — Ombre de la barre debout. — Ombre de la barre fronto-horizontale.	120
14.	Ombre d'un cercle sur un cylindre.	123
15 20.	Ombre portée sur un cylindre par un cercle concentrique à sa base ou ombre du listel. — Détermination du point de perte. — Théorème sur les tangentes aux points de perte.	

nos d'ordre.		pages.
	— Point le plus haut de la courbe. — Point sur l'axe et sur le contour apparent. — Résumé.	124
21	22. Ombre portée sur un cylindre par un cercle parallèle au plan vertical (1 ^{er} Cas, ombre complète). — Détermination de points principaux. — Même problème (2 ^e Cas, ombre incomplète)	128
23	24. Explication de la figure 2 de la planche 7. — Travail des élèves pour la prochaine leçon	132

10^e LEÇON. — *Ombres portées sur les cylindres en creux.*

1 à	2.	Ombre portée sur un cylindre par son cercle de base. — <i>Ombre du couvercle</i> et <i>ombre du pont</i> . — Théorème: La ligne d'ombre est une courbe plane.	133
	3.	Ombre portée sur un cylindre par sa base pleine ou <i>ombre du couvercle</i> . — Point le plus bas. — Points de départ ou d'origine. — Tangentes en ces points. — Remarques pratiques	136
	4.	Ombre portée sur un cylindre par sa base vide ou <i>ombre du pont</i>	138
5	10.	Explication des fig. 3 et 4 de la planche 7. — Points le plus haut et le plus bas. — Points le plus à gauche et le plus à droite. — Ombres des points du disque situés sur le diamètre debout. — Ombre du disque complet.	139
11	12.	Lavis. — Remarques. — Lavis par flaches.	143
	13.	Nature des matériaux. — Travail des élèves.	145

11^e LEÇON. — *Ombres portées sur les cônes pleins et creux.*

1 à	2.	Digression. — Ombre portée par un cercle horizontal sur un plan vertical à 45°. — Ombre portée sur un plan vertical à 45° par un point dont on connaît la distance en avant d'une verticale de ce plan.	146
	3.	Ombre portée par un point sur un cône	149
4	5.	Ombre portée sur un cône par une courbe quelconque. — Recherche des points de perte.	150

nos d'ordre.		pages.
6.	Emploi d'un plan auxiliaire à 45°. — Trouver l'ombre propre d'un cône sans se servir de la projection horizontale	151
7.	Epure de l'ombre portée par un point sur un cône. — 1 ^{re} Méthode: En se servant de la projection horizontale. — 2 ^e Méthode: En se servant du plan auxiliaire à 45°	152
8	13. Application (planche 8, fig. 1). — Ombre portée sur un cône creux par son cercle de base supposé plein. — Epure de la projection verticale. — Point le plus bas. — Point sur le contour apparent. — Point projeté sur l'axe. — Point d'origine. — Point de brisure	154
14	17. Même problème. — En projection horizontale. — Points situés sur des parallèles équidistants. — Point situé dans le plan de symétrie à 45°. — Points d'origine. — Explication de la fig. 1 de la planche 8	158
	18. Lavis de la fig. 1 de la planche 8.	160
	19. Travail des élèves	160

12^e LEÇON. — Ombres portées sur les sphères pleines et creuses.

1	2. Ombre portée par un point sur une sphère. — Ombre portée par une courbe.	162
3	7. Ombre portée sur une sphère pleine par un cercle horizontal (planche 8, fig. 2). — Epure en projection verticale. — Point le plus haut. — Point de perte dans l'ombre propre de la sphère. — Points situés sur un parallèle donné. — Point projeté sur l'axe et point sur le contour apparent.	163
8	13. La même épure, en projection horizontale. — Ombres portées sur le plan horizontal. — Point le plus haut de l'ombre portée par le disque sur la sphère. — Points limites. — Points de perte	165
14	16. Ombre portée dans une demi-sphère creuse par son cercle de base. — Epure en projection horizontale. — Points d'origine. — Point le plus bas. — Ombre portée sur le plan horizontal	169
17	19. La même épure en projection verticale. — Points d'origine. — Point le plus bas. —	

	Ombre portée par le demi-cercle de front. —	
	Point de brisure.	171
20.	Lavis des deux sphères	172
21.	Travail des élèves	172

13^e LEÇON. — *Ombres et lavis des tores simples en relief.*

	1. Sommaire de la leçon	174
2 à 5.	Lignes d'ombres et de teintes d'un tore circulaire, en projection horizontale. — Points des courbes de teintes situées sur un méridien quelconque. — Détermination des sommets. — Points sur les contours apparents.	174
6	7. Même problème. — Lignes d'ombre et de teintes en élévation. — Points sur l'équateur. — Points sur des parallèles. — Points sur le contour apparent. — Remarques. — Lignes de démarcation	178
8	9. Même problème. — Lignes d'ombre et de teintes en coupe. — Ombre autoporté.	180
	10. Torres de petites dimensions. — Tracé simplifié des courbes d'ombre et de teintes.	
11	13. Lavis. — Nature des matériaux. — Travail des élèves	183

14^e LEÇON. — *Ombres et lavis des tores simples en creux.*

1 à 3.	Demi-tore creux en projection horizontale. — Ligne d'ombre propre et lignes de teintes. — Parties réelles et virtuelles des courbes d'ombre propre	185
4	7. Ombre portée par le grand équateur. — Points d'origine. — Point dans le méridien de symétrie de 45°. — Points situés sur des parallèles donnés	188
8	10. Ombre portée par le petit équateur. — Rencontre de cette ombre et de l'ombre autoportée, ou, points d'origine. — Tangentes aux points d'origine	190
11	12. Tracé simplifié des courbes d'ombre et de teintes sur les tores creux à cercles générateurs très-petits. — Lavis	192
	13. Tore extérieur creux ou <i>Scotie</i> , en élévation. — Tracé des courbes de teintes	193

nos d'ordre.

pages.

14	18.	Ombre portée dans le trou annulaire. — Emploi du plan auxiliaire à 45°. — Points de l'ombre situés sur l'équateur. — Points situés sur un parallèle quelconque. — Point d'origine. — Ombre portée à gauche.	193
19	24.	Ombre portée sur la scotie. — Point situé sur un parallèle donné. — Point sur l'équateur. Point sur le parallèle inférieur. — Point le plus haut. — Points sur l'axe et sur le contour apparent de gauche.	196
	25.	Ombres portées dans le trou annulaire et sur le plan de coupe. — Point de brisure.	197
	26.	Lavis. — Travail des élèves.	199

15^e LEÇON. — *Cavets annulaires droits et inclinés.*

	1.	Cavet annulaire. — Définition	200
	2.	Cavet annulaire tourné en haut, en élévation. — Tracé des lignes de teintes.	200
3	4.	Cavet annulaire tourné en bas, en élévation. — Tracé des lignes de teintes. — Ombre portée par le tore sur le cavet. — Emploi du plan auxiliaire à 45°	201
5	6.	Cavet annulaire en projection horizontale. — Tracé des lignes de teintes. — Ombres portées sur le plan horizontal et sur le cavet.	204
7	10.	Cavet annulaire tourné à gauche et à 45°. — Tracé des lignes des teintes. — Remarques. — Lignes de démarcation. — Lignes de teintes du listel. — Ombres portées	205
11	13.	Cavet annulaire tourné à droite et à 45°. — Tracé des lignes de teintes. — Lignes d'ombres propres. — Cas particulier remarquable. — Construction simplifiée de la seconde ombre propre	208
14	16.	Lavis. — Nature des matériaux. — Dimensions. Travail des élèves	211

16^e LEÇON. — *Tores composés.*

1 à 2.	Définitions.	212
	Doucine annulaire en saillie, en élévation et renversée. — Tracé de l'ombre portée par son	

		listel. — Point le plus haut. — Point de perte. — Points sur l'axe et sur le contour apparent.	212
3	3.	Même doucine. — Ombre portée en plan.	216
	4.	Même doucine. — Tracé des lignes de teintes	216
	5.	Doucine annulaire en creux. — Doucine droite. — Ombre de la coupe. — Point le plus bas. Ombre de l'ouverture cylindrique inférieure.	217
	6.	Même doucine. — Ombre du plan.	218
	7.	Même doucine renversée. — Ombre de la coupe.	220
	8.	Même doucine. — Tracé des lignes de teintes	223
	9.	Talon annulaire en saillie. — Ombre portée sur le talon précédent, renversé et en élévation	223
	10.	Même talon. — Ombre portée en plan. — Point de perte.	224
	11.	Même talon. — Tracé des lignes de teintes	226
	12.	Travail des élèves	226

17^e et 18^e LEÇONS. — *Théorie du lavis* (suite et fin).

1. à	3.	Principe des distances. — Des différents plans, en peinture.	227
4	5.	Manière de rendre, en camaïeu, à l'encre de Chine, les effets de la distance. — Règle générale.	228
6	7.	Principe des orientations. — Les rayons lumineux et les rayons visuels. — Corps dépolis et corps polis. — Première expérience.	230
8	12.	Digression. — Normale à un plan et à une surface. — Angle d'incidence. — Cosinus de l'angle d'incidence. — Théorème sur la projection d'une droite. — Angle de deux plans.	231
	13.	Eclairement total. — Eclairement unitaire ou spécifique d'une surface plane	233
	14.	Théorème. — L'éclairement unitaire d'un élément de surface, plane ou courbe, est proportionnel au cosinus de l'angle d'incidence des rayons lumineux.	233
	15.	Recherche des lignes d'égale teinte sur un corps dépoli	235
16	17.	Rayons de reflets. — Deuxième expérience. — Courbe représentative des intensités des rayons lumineux de reflets	235

TABLE DES MATIÈRES.

273

is d'ordre.		pages.
18.	Rayons atmosphériques. — Rayon atmosphérique principal	236
19.	Conséquences intéressantes de cette étude des rayons indirects. — Variation de l'intensité de l'ombre avec la distance de l'objet qui porte ombre. — Variations des teintes dans l'ombre propre d'une sphère. — Intensités des teintes sur une sphère dont une partie est dans l'ombre portée	236
20.	Résumé. — Principes pour les corps dépolis	238
23.	Corps polis. — Lois de la réflexion. — Réflexion sur une surface plane	239
24.	Aspect d'un plan parfaitement poli, éclairé par un flambeau unique.	240
25.	Aspect d'un plan poli, éclairé par des rayons parallèles, dirigés dans une seule direction et regardé avec des rayons visuels parallèles, c'est-à-dire, l'œil étant placé à l'infini	240
26.	Aspect d'un plan poli éclairé par des rayons parallèles, venant dans toutes les directions, l'œil étant à l'infini	240
27.	Aspect d'une sphère polie, éclairée par des rayons parallèles, dirigés dans une seule direction, l'œil étant à l'infini	241
28.	Aspect d'une sphère polie, éclairée par des rayons parallèles, dirigés dans toutes les directions, l'œil étant à l'infini	242
29.	Corps imparfaitement polis, ou mi-polis.	243
30.	Usage des corps polis ou dépolis.	243
31.	Corps mi-polis, dans l'ombre portée.	243
32.	Travail des élèves	244

Fin du cours.

Echelles de teintes. — Corps dépolis.	245
Echelles de teintes. — Corps mi-polis.	253
Table des matières	261

FIN DE LA TABLE.

Abbeville. — Typ. et sér. Gustave Retaux.